I esonero – 11/12/2012

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*
• *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
• *È* **vietato***: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
• *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente!* **Risposte senza giustificazioni non danno punteggio**.
• **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Enunciare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$ e dedurne la formula di integrazione per parti.

(ii) Scrivere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

(iii) Enunciare il principio del massimo per funzioni armoniche e dedurne l'unicità per le soluzioni del problema di Dirichlet.

(iv) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \ , & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \ , & t > 0 \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x \ . & \end{cases}$$

Es 2 [Pt. 30] (i) Scrivere e dedurre la formula del Laplaciano in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.
(ii) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ , & \text{su } U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen}^3\theta \ , & \theta \in [0, 2\pi] \ . \end{cases}$$

Es 3 [Pt. 30] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \cos 2t \ , & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \ , & t > 0 \\ u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sen} n\pi x \ . & \end{cases}$$

Es 4 [Pt. 15] (i) Dare la definizione di funzione subarmonica.

(ii) Sia $u(x,y) = \max\{e^x \cos y, 1\}$. Dimostrare che u è subarmonica su $\mathbb{R}^2$.