Teorema di Bolzano–Weierstrass

Lemma *Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ con un numero infinito di elementi. Allora esiste una successione iniettiva in E convergente ad $\alpha \in \mathscr{D}E$.*

Dimostrazione Poiché E è limitato esistono due numeri $a < b$ tali che $E \subseteq [a, b]$. Sia $I_0 = [a, b] =: [a_0, b_0]$ e dividiamo in due tale intervallo: $I_0 = I \cup I'$ con $I = [a, c]$, $I' = [c, b]$ e $c = (a + b)/2$ il punto di mezzo di I_0. Poiché $\#E = \infty$, o $\#I \cap E = \infty$ o $\#I' \cap E = \infty$ (se fossero entrambi finiti, la loro unione, che coincice E, sarebbe finita contraddicendo l'ipotesi su E). Se $\#I \cap E = \infty$ poniamo $I_1 := I = [a, c] =: [a_1, b_1]$, se $\#I \cap E < \infty$ poniamo $I_1 := I' = [c, b] =: [a_1, b_1]$. Chiaramente, in entrambi i casi, $a_0 \le a_1 < b_1 \le b_0$, $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ e $\#I_1 \cap E = \infty$. Ora, iteriamo la stessa costruzione con I_1 al posto di I_0 e così via. In tal modo otteniamo una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ tali che, per ogni $k \ge 1$, si ha:

(a) $a_0 \le \cdots \le a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1} \le \cdots \le b_0$

(b) $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$

(c) $\#I_k \cap E = \infty$.

Quindi, la successione $\{a_k\}$ è monotòna crescente e limitata superiormente (da un qualunque b_j), mentre $\{b_k\}$ è monotòna decrescente e limitata inferiormente (da un qualunque a_j). Dunque esistono (finiti) i limiti $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \alpha$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = \beta$. Da (b) segue che

$$\beta - \alpha = \lim_{k\to+\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0\,,$$

e dunque $\alpha = \beta$. Ora, scegliamo una successione $\{x_k\}$ con $x_k \in E$ come segue: x_1 è un qualunque punto di $E_1 := I_1 \cap E \backslash \{\alpha\}$; x_2 è un qualunque punto di $E_2 := (I_2 \cap E)\backslash\{\alpha, x_1\}$, e, iterativamente, per $k \ge 2$, x_k è un qualunque punto di[1]

$$E_k := (I_k \cap E)\backslash\{\alpha, x_1, ..., x_{k-1}\} \subseteq E\,.$$

Poiché $x_k \in I_k$ si ha che $a_k \le x_k \le b_k$ per ogni k e dal criterio del confronto segue che $\lim x_k = \alpha$. Infine, per costruzione $x_k \ne x_h$ per ogni $h \ne k$ e poiché $x_k \ne \alpha$, $\alpha \in \mathscr{D}E$. ∎

Teorema[2] (i) *Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ con un numero infinito di elementi*[3]. *Allora $\mathscr{D}E \ne \varnothing$.*

(ii) *Da ogni successione di numeri reali limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente (ossia con limite in $\mathbb{R}$).*

(iii) *Da ogni successione di numeri reali è possibile estrarre una sottosuccessione regolare (ossia con limite in $\mathbb{R}^*$).*

Dimostrazione (i) segue direttamente dal Lemma.

(ii) Sia $\{x_k\}$ una successione limitata di numeri reali e sia $E := \{x_k \big| k \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei suoi valori. Se $\#E < \infty$, allora uno dei suoi valori, diciamo $\bar{x}$ viene assunto un numero infinito di volte da $\{x_k\}$, ossia, se $\mathscr{N} := \{n \in \mathbb{N} \big| x_n = \bar{x}\}$, allora $\#\mathscr{N} = \infty$. Ordinando[4] $\mathscr{N}$ otteniamo che $\mathscr{N} = \{n_j \big| j \in \mathbb{N}\}$ con $n_j < n_{j+1}$: quindi la sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ è tale che $x_{n_j} = \bar{x}$ per ogni j (ed è quindi banalmente convergente).

Sia $\#E = \infty$. Per il Lemma esistono $y_k \in E$ tali che $y_k \ne y_h$ se $h \ne k$ e $y_k \to \alpha \in \mathbb{R}$. Ora, $y_k \in E$ significa che esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $y_k = x_{n_k}$. Chiaramente $n_k \to +\infty$, ma, in generale, $\{n_k\}$ non è strettamente crescente. Dal Lemma 6.3 segue, però, che esiste una *sottosuccessione*

[1] Si noti che, poiché gli intervalli I_k sono infiniti, lo sono anche gli insiemi E_k.
[2] Cfr. Teorema 6.4 di [C].
[3] Per la definizione di insieme finito, infinito e cardinalità di un insieme, si veda §1.4.4 di [C].
[4] Si usi il principio del minimo: $n_1 = \min \mathscr{N}$, $n_2 = \min \mathscr{N}\backslash\{n_1\}$, $n_3 = \min \mathscr{N}\backslash\{n_1, n_2\}$....

$\{n_{k_j}\}$ strettamente crescente e quindi la sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}$ soddisfa l'asserto.
(iii) Sia $\{x_k\}$ una successione di numeri reali. Se $\{x_k\}$ non è limitata, la tesi è ovvia[5]; se $\{x_k\}$ è limitata, la tesi segue da (ii). $\blacksquare$

[5]Iterativamente: n_1 è tale che $x_n > 1$ per ogni $n \geq n_1$ e e, per $k > 1$, $n_k > n_{k-1}$ è tale che $x_n > k$ per ogni $n \geq n_k$.