

Funzioni continue e intervalli

Proposizione 1¹ Sia I un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Allora f è monotona.

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che f non sia monotona. Allora² esistono tre punti in I , $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$: più precisamente, se poniamo

$$y_i := f(x_i), \quad \bar{y}_1 := \min\{y_1, y_3\}, \quad \bar{y}_3 := \max\{y_1, y_3\},$$

allora $y_2 \notin [\bar{y}_1, \bar{y}_3]$, cioè vale una delle seguenti alternative

$$(i) \quad y_2 < \bar{y}_1, \quad (ii) \quad \bar{y}_3 < y_2.$$

Nel caso (i), scegliamo $\bar{y} \in (y_2, \bar{y}_1)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_1$) si ha che $y_2 < \bar{y} < y_1$ e $y_2 < \bar{y} < y_3$. Quindi per il teorema del valor medio³ e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.

Nel caso (ii), scegliamo $\bar{y} \in (\bar{y}_3, y_2)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_3$) si ha che $y_1 < \bar{y} < y_2$ e $y_3 < \bar{y} < y_2$. Come sopra, per il teorema del valor medio e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. ■

Ovviamente, nell'ipotesi della Proposizione 1 (essendo f iniettiva) f è *strettamente* monotona.

Facciamo ora un'osservazione elementare sulle funzioni monotone:

Lemma Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona e supponiamo che f non sia continua in $x_0 \in A$. Allora $f(A)$ non è un intervallo.

Dimostrazione Possiamo assumere che f sia crescente (altrimenti consideriamo $-f$ al posto di f). Poiché f non è continua in x_0 , x_0 non è un punto isolato di A e quindi, poiché i limiti laterali delle funzioni monotone esistono sempre, si deve avere o $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$. Nel primo caso si ha $\alpha := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in A, x < x_0} f(x) < f(x_0)$, ma questo significa che l'intervallo $(\alpha, f(x_0)) \subseteq f(A)^c$ e quindi $f(A)$ non è un intervallo. Nell'altro caso il ragionamento è analogo. ■

Poiché l'inversa di una funzione strettamente monotona è strettamente monotona, segue immediatamente

Proposizione 2⁴ Una funzione strettamente monotona su un intervallo ha inversa continua.

Infine, dalle Proposizioni 1 e 2 e dal fatto che funzioni continue mandano intervalli in intervalli (teorema del valor medio⁵) segue

Proposizione 3 Sia I un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e continua. Allora, la funzione inversa di f , f^{-1} , è una funzione continua definita sull'intervallo $J = f(I)$ e con immagine I .

¹Cfr. Proposizione 2.68

²**Esercizio***: f è monotona se e solo se comunque scelti tre punti del dominio $x_1 < x_2 < x_3$ si ha che $f(x_2)$ è compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$.

³Teorema 2.53-(ii) applicato prima all'intervallo $[x_1, x_2]$ e poi all'intervallo $[x_2, x_3]$.

⁴Cfr. Teorema 2.66.

⁵Vedi, in particolare, Corollario 2.54.