Il teorema di Heine–Cantor su intervalli

Definizione *Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua su A se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x, y \in A\,,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Teorema *Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e $f \in C(I)$. Allora, f è uniformemente continua su I.*

Dimostrazione* Supponiamo, per assurdo, che non valga la (1) con $A = I$, ossia, che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistano $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Scegliendo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe, allora, che

$$\forall n\ \exists\ x_n, y_n \in [a, b] : \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}\,, \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{2}$$

Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ e $x_0 \in [a, b]$ tali che $\lim x_{n_k} = x_0$. Ma allora, da (2) segue anche che $\lim y_{n_k} = x_0$, infatti:

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |x_{n_k} - y_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0\,.$$

Quindi, essendo f è continua in x_0, si avrebbe

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_{k \to +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \overset{(2)}{\geq} \varepsilon > 0\,,$$

portando ad una contraddizione. ∎