Teorema di Bernoulli–Hopital
Siano $a, x_0 \in \mathbb{R}$, $a < x_0$, $L \in \mathbb{R}^*$, f, g *funzioni differenziabili in* (a, x_0) *con* $g' \neq 0$ *e tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = 0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'} = L\,. \tag{2}$$

Allora $g \neq 0$ *in* (a, x_0) *e* $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = L$.

Dimostrazione Estendiamo f e g su $(a, x_0]$ ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$; da (1) segue che f e g così estese sono continue su $(a, x_0]$. Per ogni $x \in (a, x_0)$, dal teorema di Lagrange (applicato a g su $[x, x_0]$) segue che esiste $\xi \in (x, x_0)$ tale che $g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0)$, il che implica che $g(x) \neq 0$. Quindi $g \neq 0$ su (a, x_0).
Sia V un intorno arbitrario di L. Da (2) segue che esiste $a' \in (a, x_0)$ tale che $f'(x)/g'(x) \in V$ per ogni $x \in (a', x_0)$. Per ogni $x \in (a', x_0)$, dal teorema di Cauchy (applicato a f e g su $[x, x_0]$) segue che esiste $\xi \in (x, x_0) \subseteq (a', x_0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V\,,$$

e quindi $\lim_{x \to x_0} f/g = L$. ∎

Osservazione 1 Lo stesso ragionamento si applica nel caso (x_0, b) $(-\infty < x_0 < b < +\infty)$ con gli ovvi cambiamenti e dunque anche nel caso $x_0 \in (a, b)$ con $-\infty < a < b < +\infty$, (con f, g differenziabili in $(a, b)\backslash\{x_0\}$ e $g' \neq 0$ in $(a, b)\backslash\{x_0\}$).

Formula di Taylor

Nei seguenti enunciati "*f continua e derivabile n volte in x_0*" significa che:

$x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, *f è definita in un intorno I di x_0, continua in x_0 e (se $n > 0$) sono definite ricorsivamente le prime $(n-1)$ derivate in I ed esiste la derivata di ordine n in x_0.*

Definizione (polinomio e resto di Taylor) Sia f continua e derivabile n volte in x_0. Chiamiamo *polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0* il polinomio di grado (al più) n dato da[1]

$$T_{f,n}(x) = T_{f,n}(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n\,. \tag{3}$$

Definiamo il *resto n–simo di Taylor di f in x_0*, la funzione

$$r_n(x; x_0) = r_{f,n}(x; x_0) := f(x) - T_{f,n}(x; x_0)\,. \tag{4}$$

Lemma di Taylor $T_{f,n}(x_0; x_0) = T_{f,0}(x; x_0) = f(x_0)$ *e se* $n \geq 1$, $T'_{f,n} = T_{f',n-1}$.

Dimostrazione Le relazioni $T_{f,n}(x_0; x_0) = T_{f,0}(x; x_0) = f(x_0)$ sono ovvie. Inoltre,

$$\begin{aligned} DT_{f,n}(x; x_0) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,k\,(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\,(x - x_0)^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(1+j)}(x_0)}{j!}\,(x - x_0)^j = T_{f',n-1}(x; x_0)\,, \end{aligned}$$

[1] Si ricordi che la derivata di ordine 0 è per definizione la funzione stessa: $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ e dunque $T_{f,0}(x; x_0) = f(x_0)$.

dove nella terza uguaglianza abbiamo fatto il cambio di variabile $j = k - 1$ nella somma. ∎

Teorema di Peano *Sia f derivabile n volte in x_0. Allora,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_{f,n}(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0\,. \tag{5}$$

Osservazione 2 (i) Da (3), (4) segue che nelle ipotesi del Teorema di Peano vale la seguente *formula di Taylor ad ordine n*

$$f(x) = T_{f,n}(x;x_0) + r_n(x;x_0)\,, \qquad \text{con} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0\,. \tag{6}$$

Si noti che, per $n = 0$, (6) è equivalente a dire che f è continua in x_0 mentre, per $n = 1$, (6) è equivalente a dire che f è derivabile in x_0 e dunque il Teorema di Peano vale, ovviamente, per $n = 0$ e $n = 1$.

(ii) (*o piccoli e O grandi*) Se g è una funzione definita vicino a x_0, si dice che $g = o((x-x_0)^n)$ ('g è un o piccolo di $(x-x_0)^n$' o, anche, che 'g è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x)^n$') se si ha che $\lim_{x\to x_0} g/(x-x)^n = 0$; si noti che, per $n = 0$, $g = o(1)$ (vicino a x_0) significa che $\lim_{x\to x_0} g = 0$.
Se g è una funzione definita vicino a x_0, si dice che $g = O((x-x_0)^n)$ ('g è un O grande di $(x-x_0)^n$' se vicino a x_0 si ha che $|g(x)| \le M(x-x_0)^n$ per una qualche $M > 0$.

(iii) Il Teorema di Peano si può formulare dicendo che:

il resto di Taylor n–simo di una funzione derivabile n volte in x_0 è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$.

Dimostrazione del Teorema di Peano (Per induzione su n). Per $n = 0$ e 1, come appena osservato, il teorema è vero. Assumiamo vero il Teorema di Peano 'ad ordine $n \ge 1$' (cioè con l'enunciato di sopra) e dimostriamolo ad ordine $n+1$, ossia, con n sostituito da $n+1$. Per ipotesi, dunque, f ha tutte le derivate fino a ordine $n+1$ in x_0. Sia $F(x) := r_{n+1}(x;x_0) = f(x) - T_{f,n+1}(x;x_0)$ e $G(x) := (x-x_0)^{(n+1)}$. Chiaramente G e G' sono non nulle per ogni $x \ne x_0$. Per il Teorema di Bernoulli–Hopital, per il Lemma di Taylor e per il Teorema di Peano applicato a f' si ha che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{r_{f,n+1}(x;x_0)}{(x-x_0)^{(n+1)}} &= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T'_{f,n+1}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_{f',n}(x)}{(n+1)(x-x_0)^n} = \frac{1}{n+1} \lim_{x\to x_0} \frac{r_{f',n}(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.
\end{aligned}$$ ∎

Proposizione 1 (Formula di Taylor con resto di Lagrange) *Sia f derivabile n volte in x_0 e $(n+1)$ volte in $I\backslash\{x_0\}$, I intorno di x_0. Allora, per ogni $x \in I$, esiste ξ tra x e x_0 tale che*

$$r_{f,n}(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{(n+1)}\,. \tag{7}$$

Dimostrazione Supponiamo che $x < x_0$ (il caso $x_0 < x$ è del tutto analogo con gli ovvi cambiamenti).
Per $n = 0$, essendo $r_{f,0}(x;x_0) = f(x) - f(x_0)$, (7) segue immediatamente dal Teorema di Lagrange. Sia ora $n \ge 1$. Per il Teorema di Cauchy ed il Lemma di Taylor, esiste $x < x_1 < x_0$ tale che[2]

[2]Il Teorema di Cauchy (seconda uguaglianza) è applicato a F/G con $F = f(x) - T_{f,n}(x;x_0)$ e $G = (x-x_0)^{n+1}$ sull'intervallo $[x,x_0]$; il Lemma di Taylor è usato nella terza uguaglianza.

$$\begin{aligned}
\frac{r_{f,n}(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} &:= \frac{f(x)-T_{f,n}(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}\\
&= \frac{f'(x_1)-T'_{f,n}(x_1;x_0)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n}\\
&= \frac{f'(x_1)-T_{f',n-1}(x_1;x_0)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n}\\
&=: \frac{r_{f',n-1}(x_1;x_0)}{(n+1)\,(x_1-x_0)^n}\,.
\end{aligned}$$

Iterando otteniamo, per un opportuno $x_n \in (x_1, x_0)$,

$$\frac{r_{f,n}(x;x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_{f^{(n)},0}(x_n;x_0)}{(n+1)!\,(x_n-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_n)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x_n-x_0)}\,.$$

Applicando il Teorema di Lagrange otteniamo l'asserto per un opportuno $\xi \in (x_n, x_0) \subseteq (x, x_0)$. ∎

Proposizione 2 (Unicità del polinomio di Taylor) *Siano $n \in \mathbb{N}_0$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ e f una funzione tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big)\,, \tag{8}$$

allora $a_k = b_k$ per ogni $0 \le k \le n$.

Dimostrazione Per $n = 0$, $f = a + o(1)$ vicino x_0 per un qualche $a \in \mathbb{R}$, significa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ e quindi se vale (8) si ha $a_0 = f(x_0) = b_0$.
Sia ora $n \ge 1$ e supponiamo, per assurdo, che la tesi non sia vera. Allora esisterebbe un $1 \le k_0 \le n$ tale che $a_k = b_k$ per $k < k_0$ e $a_{k_0} \ne b_{k_0}$. Da (8) seguirebbe che

$$0 = \sum_{k=k_0}^{n} (a_k - b_k)(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = (a_{k_0} - b_{k_0})(x-x_0)^{k_0} + o((x-x_0)^{k_0})\,,$$

il che implica , dividendo per $(x-x_0)^{k_0}$ che $0 = (a_{k_0} - b_{k_0}) + o(1)$, che, a sua volta, implica $a_{k_0} = b_{k_0}$ ottenendo una contraddizione. ∎

Nella dimostrazione abbiamo usato (in parte) la seguente '*algebra degli o piccoli*' la cui dimostrazione è lasciata per esercizio:

Esercizio Le seguenti affermazioni vanno intese 'vicino a $x_0 \in \mathbb{R}$'.

(i) Se $f = o((x-x_0)^n)$, allora $f = o((x-x_0)^m)$ per ogni $0 \le m \le n$.

(ii) Se $f = o((x-x_0)^n)$ e $g = o((x-x_0)^m)$, allora $fg = o((x-x_0)^{n+m})$, e $af + bg = o((x-x_0)^p)$ con $p = \min\{n, m\}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $f = o((x-x_0)^n)$, allora $f/(x-x_0)^m = o((x-x_0)^{n-m}$ per ogni $m \le n$.