

L'integrale di Riemann su \mathbb{R}

D'ora in avanti considereremo l'insieme vuoto un intervallo (limitato).

Osservazione 1 (i) Si ricorda che l'intersezione di due intervalli è un intervallo e che l'unione di due intervalli è un intervallo¹ o l'unione disgiunta di due intervalli.

(ii) Il complementare di un intervallo è un intervallo o unione di due intervalli disgiunti².

(iii) Se I e J sono intervalli disgiunti non vuoti allora o $I \leq J$ o $J \leq I$.

Dimostrazione* Sia $a = \inf I$, $b = \sup I$ e sia $y \in J$. Poiché I e J sono disgiunti $y \notin (a, b)$ e quindi si deve avere o $y \geq b$ o $y \leq a$. Supponiamo $y \geq b$ (il caso $y \leq a$ si tratta in modo analogo). In tal caso si ha $J \geq I$: infatti sia $y' \in J$, se fosse $y' < b$ allora (dalla definizione di estremo superiore) seguirebbe che esiste $x' \in I$ tale $y' < x'$, e quindi $y' < x' \leq b \leq y$, che implica che $x' \in J$ contraddicendo l'ipotesi che I e J sono disgiunti. Dunque $y' \geq b$. ■

1 Insiemi elementari

Definizione 2 Un insieme elementare $E \subseteq \mathbb{R}$ è una unione finita di intervalli limitati. La famiglia degli insiemi elementari si denota $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R})$; più in generale, $\mathcal{E}(E)$ con E intervallo di \mathbb{R} denota la famiglia degli insiemi elementari contenuti in E .

Lemma 3 Sia $E = \bigcup_{1 \leq k \leq m} J_k$ con J_k intervalli. Allora esistono $n \leq m$ intervalli I_k a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{1 \leq k \leq n} I_k$.

Dimostrazione* Per induzione su $m \in \mathbb{N}$. Per $m = 1$ la tesi è vera con $n = m = 1$ e $I_1 = J_1$. Assumiamo la tesi vera per $m \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $m + 1$. Se $J_{m+1} \cap J_k = \emptyset$ per ogni $1 \leq k \leq m$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva (con $n \leq m + 1$). Se esiste $j \leq m$ tale che $J_{m+1} \cap J_j \neq \emptyset$, allora $\tilde{J}_j := J_j \cup J_{m+1}$ è un intervallo e la tesi segue dall'ipotesi induttiva applicata agli m intervalli J_k con k tale che $j \neq k \leq m$ e \tilde{J}_j (in questo caso, $n \leq m$). ■

Osservazione 4 Dal questo lemma segue che un insieme elementare può sempre essere descritto come unione finita e disgiunta di intervalli limitati.

Notazione Se $E = \cup A_j$ con A_j disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$) scriveremo $E = \dot{\cup} A_j$.

Proposizione 5 Se $A, B \in \mathcal{E}(I)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, e $A \setminus B$ appartengono a $\mathcal{E}(I)$.

Dimostrazione* Siano $A = \cup I_j$ e $B = \cup J_k$ con I_j e J_k intervalli in³ I . Allora, $A \cup B = \cup_{j,k} I_j \cup J_k$ e quindi $A \cup B \in \mathcal{E}(I)$. Inoltre, essendo l'intersezione di intervalli un intervallo,

$$A \cap B = \bigcup_{j,k} I_j \cap J_k \in \mathcal{E}(I). \quad (1)$$

Infine,

$$A \setminus B = (\cup_j I_j) \cap (\cup_k J_k)^c = (\cup_j I_j) \cap (\cap_k J_k^c) = \cup_j (I_j \cap \cap_k J_k^c). \quad (2)$$

Per l'Osservazione 1–(ii), per ogni j , $I_j \cap \cap_k J_k^c$ è unione finita di intervalli $I_{ji} \subseteq I_j$, e quindi

$$A \setminus B = \bigcup_{j,i} I_{ji} \in \mathcal{E}(I), \quad I_{ji} \subseteq I_j \setminus B. \quad \blacksquare \quad (3)$$

¹Se l'intersezione è non vuota o uno dei due intervalli è l'insieme vuoto.

²Più precisamente: se $I \neq \mathbb{R}$ è un intervallo illimitato, I^c è un intervallo illimitato; se I è un intervallo limitato, I^c è unione di due intervalli illimitati disgiunti.

³Gli indici variano su insiemi finiti.

Definizione Due intervalli I e J si dicono *adiacenti* se $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J$ è un intervallo⁴.

Es 1 Siano $I \leq J$ due intervalli ordinati. Dimostrare che esiste un unico intervallo (eventualmente vuoto) I' “tra I e J ”, ossia un unico intervallo I' disgiunto da I e J , tale che $I \leq I' \leq J$ e $I \cup I' \cup J$ è un intervallo.

Es 2 Sia $E \in \mathcal{E}$. Dimostrare che esistono e sono unici intervalli ordinati I_i ($1 \leq i \leq n$), non adiacenti tali che $\dot{\cup} I_i = E$.

2 Funzioni a scalini

Definizione 6 Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a *scalini* se f coincide con una combinazione lineare (finita) di funzioni caratteristiche⁵ di intervalli limitati, ossia,

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad I_j \text{ intervallo limitato.} \quad (4)$$

L'insieme di tali funzioni si denota $S := S(\mathbb{R})$ e più in generale, dato un intervallo I , $S(I)$ denota le funzioni a scalini come in (4) con $I_j \subseteq I$.

Lemma 7 $f \in S \iff \#f(\mathbb{R}) < \infty$ e per ogni $\alpha \in f(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $f^{-1}(\alpha) \in \mathcal{E}$.

Dimostrazione Se $f \in S$ è come in (4), allora⁶ $f(\mathbb{R}) = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e se $\alpha \in f(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $f^{-1}(\alpha) = \cup \{I_j \mid \alpha_j = \alpha\}$ che è un insieme elementare.

Assumiamo, ora, che⁷ $f \not\equiv 0$ sia tale che $\#f(\mathbb{R}) < \infty$ e per ogni $\alpha \in f(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $f^{-1}(\alpha) \in \mathcal{E}$. Si noti che da tali ipotesi segue che l'insieme $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ è limitato (essendo unione finita di insiemi elementari), dunque necessariamente $0 \in f(\mathbb{R})$. Sia, dunque, $f(\mathbb{R}) = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ (con gli α_j diversi tra loro e diversi da 0). Per ipotesi, per ogni $1 \leq j \leq n$, $f^{-1}(\alpha_j) = E_j \in \mathcal{E}$ e, per il Lemma 3, esistono n_j intervalli disgiunti e limitati I_{jk} tali che $E_j = \dot{\cup}_k I_{jk}$. Quindi, $\chi_{E_j} = \sum_k \chi_{I_{jk}}$ e

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_j \chi_{I_{jk}}. \quad \blacksquare \quad (5)$$

Osservazione 8 Si noti che la rappresentazione in (5) di una funzione f a scalini (non identicamente nulla) è della stessa forma di (4) ma con gli intervalli a due a due disgiunti. Inoltre, $E := \dot{\cup}_k E_k = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ e dunque la rappresentazione (5) è unica a meno di riordinamenti degli indici.

Infatti, questa osservazione si generalizza anche a due (o più) funzioni a scalini come segue:

Lemma 9 Se $f, g \in S(I)$, esistono intervalli disgiunti e limitati $I_j \subseteq I$, $1 \leq j \leq n$, e numeri reali α_j e β_j tali che

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}, \quad g = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{I_j}, \quad (6)$$

dove⁸ i numeri α_j o β_j possono assumere il valore 0.

Dimostrazione Se $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$ la tesi è ovvia. Assumiamo che entrambe f e g non siano identicamente nulle e siano $E = \{x \mid f(x) \neq 0\} \in \mathcal{E}(I)$ e $F = \{x \mid g(x) \neq 0\} \in \mathcal{E}(I)$. Possiamo decomporre E e F come fatto in (i) in insiemi elementari disgiunti $E = \dot{\cup} E_k$, $F = \dot{\cup} F_i$ tali che $E_k = \{x \mid f(x) = \alpha_k\}$ e $F_i = \{x \mid g(x) = \beta_i\}$ (α_k sono i $p \geq 1$ valori distinti diversi da 0 assunti da f e β_i sono i $q \geq 1$ valori distinti diversi da 0 assunti da g). Osserviamo, ora, che

⁴Ad esempio, $(0, 1)$ e $[1, +\infty)$ sono adiacenti e $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$ non lo sono (ma sono contigui).

⁵Si ricorda che la funzione caratteristica (o indicatrice) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è la funzione $x \rightarrow \chi_A(x)$ definita come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$; in particolare χ_\emptyset è la funzione identicamente nulla.

⁶Si noti che gli intervalli I_j sono limitati e quindi $f = 0$ nel complementare di $\cup I_j$.

⁷ $f \not\equiv 0$ significa che f non è identicamente nulla. Ovviamente, se $f \equiv 0$, vale (4) con, ad esempio, $f = 0 \cdot \chi_{(0,1)}$.

⁸Si noti che nella (6) gli intervalli nelle due identità uguaglianza sono gli stessi.

su $E_k \setminus F$ (se non vuoto) $f = \alpha_k$ e $g = 0$, su $F_i \setminus E$ (se non vuoto) $g = \beta_i$ e $f = 0$, mentre su $E_k \cap F_i$ (se non vuoto) $f = \alpha_k$ e $g = \beta_k$. Da queste osservazioni e dal Lemma 3, la tesi segue facilmente⁹. ■

Dalla rappresentazione (6) di due funzioni a scalini segue immediatamente la seguente

Proposizione 10 *Se $f, g \in S(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $S(I)$ anche le funzioni $af + bg$, fg , $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^\pm e $|f|$.*

Dimostrazione Siano f, g come in (6), allora

$$\begin{aligned} af + bg &= \sum_{j=1}^n (a\alpha_j + b\beta_j)\chi_{I_j}, \quad fg = \sum_{j=1}^n (\alpha_j\beta_j)\chi_{I_j}, \quad \max\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \max\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j}, \\ \min\{f, g\} &= \sum_{j=1}^n \min\{\alpha_j, \beta_j\}\chi_{I_j}, \quad f^\pm = \sum_{j=1}^n \alpha_j^\pm \chi_{I_j}, \quad |f| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \chi_{I_j}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Es 3 Siano $f = -2\chi_{[-3, -2]} + 5\chi_{(1, \sqrt{2}]}$, $g = \sum_{i=1}^5 (-1)^i \chi_{(-4+i, -3+i)}$. Si determinino n , I_j , α_j e β_j tali che valga (6).

Es 4 Si determinino gli intervalli I_j nella (6).

3 Misura di insiemi elementari

Cominciamo col definire la misura (o lunghezza) di un intervallo:

Definizione 11 *Sia I un intervallo. Chiamiamo lunghezza o misura (unidimensionale) I l'elemento di \mathbb{R}^* dato da*

$$|I| := \begin{cases} 0, & \text{se } I = \emptyset; \\ +\infty, & \text{se } I \text{ non è limitato}; \\ \sup I - \inf I, & \text{se } \emptyset \neq I \text{ è limitato}. \end{cases} \quad (7)$$

A volte si usano i simboli $\ell(I)$ o $\text{mis}_1(I)$ al posto di $|I|$.

Osservazione 12 (i) La lunghezza di un punto (o meglio di un singleton $I = \{a\} = [a, a]$) è zero.

(ii) Si noti anche che la definizione di lunghezza non dipende dal fatto che gli estremi appartengano o meno all'intervallo.

Lemma 13 *Sia I un intervallo limitato, $n \geq 2$ e I_1, \dots, I_n intervalli tali che $I = \dot{\cup} I_k$. Allora*

$$|I| = \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad (8)$$

Dimostrazione Poiché gli intervalli I_k sono disgiunti, per il punto (iii) dell'Osservazione 1 possiamo assumere che $I_1 \leq \dots \leq I_n$. Siano $a_k = \inf I_k \leq b_k = \sup I_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$, $a = \inf I = a_1$ e $b = \sup I = b_n$. Poniamo anche $a_{n+1} := b_n = b$. Poiché $I = \dot{\cup} I_k$ (e I è un intervallo), si deve avere $a_{k+1} = b_k$ per ogni $1 \leq k \leq n$ e quindi

$$|I| = b - a = a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad \blacksquare$$

⁹Esercizio 4.

Lemma 14 Siano I_j e J_k intervalli limitati con $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ tali che $E = \dot{\cup} I_j = \dot{\cup} J_k$. Allora $\sum |I_j| = \sum |J_k|$.

Dimostrazione Dalle ipotesi segue che per ogni j e k si ha $I_j = \dot{\cup}_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot{\cup}_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 13 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$. Quindi,

$$\sum_j |I_j| = \sum_j \sum_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j |I_j \cap J_k| = \sum_k |J_k|. \quad \blacksquare$$

Questo lemma permette di dare la definizione di misura di un insieme elementare:

Definizione 15 Sia $E \in \mathcal{E}$. Allora $|E| := \text{mis}_1(E) := \sum |I_k|$ dove $E = \dot{\cup} I_k$ ($1 \leq k \leq n$).

Si noti che il numero $|E|$ per il Lemma 14 dipende solo dall'insieme elementare E e non dal particolare modo in cui viene rappresentato come unione disgiunta di intervalli.

4 Integrale di funzioni a scalini

Diamo qui la definizione di integrale (di Riemann) delle funzioni a scalini. Sebbene non necessario, è più semplice (e intuitivo) definire l'integrale di una funzione a scalini f espressa come in (4) con gli intervalli I_j a due a due disgiunti (cosa sempre possibile in vista dell'Osservazione 8). Alla fine della sezione vedremo che la stessa definizione può essere estesa a qualunque funzione a scalini $f = \sum \alpha_j \chi_{I_j}$ (senza richiedere che gli intervalli limitati I_j siano disgiunti¹⁰).

Lemma 16 Sia $f \in S(I)$ e sia

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j} = f = \sum_{k=1}^m \beta_k \chi_{J_k} \quad (9)$$

con gli $\{I_j\}$ disgiunti tra loro e gli $\{J_k\}$ disgiunti tra loro. Allora,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j |I_j| = \sum_{k=1}^m \beta_k |J_k|. \quad (10)$$

Dimostrazione Possiamo assumere che $\alpha_j \neq 0 \neq \beta_k$ per ogni j e k (dato che se sono zero non contribuiscono alle somme in (10)). In tal caso

$$E := \dot{\cup}_j I_j = \dot{\cup}_k J_k = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}.$$

Ora¹¹, per ogni j e k si ha $I_j = \dot{\cup}_k (I_j \cap J_k)$ e $J_k = \dot{\cup}_j (J_k \cap I_j)$ e quindi, per il Lemma 13 si ha che $|I_j| = \sum_k |I_j \cap J_k|$ e $|J_k| = \sum_j |J_k \cap I_j|$; inoltre, se $I_j \cap J_k \neq \emptyset$ si deve avere $\alpha_j = \beta_k$ (essendo il valore di f su $I_j \cap J_k$), mentre se $I_j \cap J_k = \emptyset$, allora $|I_j \cap J_k| = 0$. Quindi,

$$\sum_j \alpha_j |I_j| = \sum_j \sum_k \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \alpha_j |I_j \cap J_k| = \sum_k \sum_j \beta_k |I_j \cap J_k| = \sum_k \beta_k |J_k|. \quad \blacksquare$$

Grazie a tale lemma la seguente definizione è ben posta:

Definizione 17 Se $f \in S(I)$ chiamiamo integrale di f su I il numero reale

$$\int_I f := \sum_{j=1}^n \alpha_j |I_j|, \quad (11)$$

dove $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$ con I_j intervalli limitati a due a due disgiunti.

¹⁰Cfr. Osservazione 16–(ii).

¹¹Cfr. dimostrazione del Lemma 14.

Dalla Proposizione 10 (e dalla sua dimostrazione) segue immediatamente la seguente

Proposizione 18 *L'integrale è un 'funzionale lineare e positivo su $S(I)$ ', ossia:*

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g, \quad \forall f, g \in S(I) \quad (12)$$

$$\int_I f \geq 0, \quad \forall f \in S(I), f \geq 0. \quad (13)$$

Osservazione 19 (i) Da (12) e (13) segue subito che, se $f, g \in S(I)$, allora

$$f \leq g \implies \int_I f \leq \int_I g, \quad (f, g \in S(I)). \quad (14)$$

A sua volta da (14), dal fatto che $-|f| \leq f \leq |f|$ e da (12) segue la fondamentale disuguaglianza

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f| \iff \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|. \quad (15)$$

(ii) Da (12) segue che se $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $I_j \subseteq E$ sono intervalli *non necessariamente disgiunti*, ($1 \leq j \leq n$), allora

$$\int_E \left(\sum_j \alpha_j \chi_{I_j} \right) = \sum_j \alpha_j |I_j|. \quad (16)$$

5 Funzioni Riemann integrabili

In questa sezione I è un intervallo limitato.

Definizione 20 *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Denotiamo*

$$S_f^-(I) := \{g \in S(I) \mid g \leq f\}, \quad S_f^+(I) := \{h \in S(I) \mid h \geq f\}. \quad (17)$$

Definiamo integrale inferiore di Riemann e integrale superiore di Riemann di f su I i numeri

$$\mathcal{J}_I^-(f) := \sup_{g \in S_f^-(I)} \int_I g, \quad \mathcal{J}_I^+(f) := \inf_{h \in S_f^+(I)} \int_I h. \quad (18)$$

La funzione f si dice Riemann integrabile se $\mathcal{J}_I^-(f) = \mathcal{J}_I^+(f)$ ed, in tal caso, si definisce l'integrale di Riemann di f il numero reale

$$\int_I f := \mathcal{J}_I^-(f) = \mathcal{J}_I^+(f). \quad (19)$$

La classe di funzioni Riemann integrabile su I si denota con $\mathcal{R}(I)$.

Osservazione 21 (i) Si noti che per una funzione limitata f , gli insiemi $S_f^+(I)$ e $S_f^-(I)$ sono sottoinsiemi non vuoti di $S(I)$. Inoltre, se $g \in S_f^-(I)$ e $h \in S_f^+(I)$, allora $g \leq f \leq h$ e dunque, da (14), segue che $\int_I g \leq \int_I h$ e

$$\left\{ \int_I g \mid g \in S_f^-(I) \right\} \leq \left\{ \int_I h \mid h \in S_f^+(I) \right\}. \quad (20)$$

Nel caso $f \in \mathcal{R}(I)$ tali sottoinsiemi di \mathbb{R} sono contigui e l'integrale di Riemann ne è l'elemento separatore. In altri termini, si ha

$$f \in \mathcal{R}(I) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists g, h \in S(I) : \begin{cases} g \leq f \leq h, \\ \int_I (h - g) < \varepsilon. \end{cases} \quad (21)$$

(ii) $S(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$: se $f \in S(I)$ possiamo prendere in (21) $g = f = h$.

(iii) Se $m \leq f \leq M$ possiamo assumere che le funzioni a scalini in (21) siano tali che $m \leq g$ e $h \leq M$. Infatti, le funzioni $\max\{g, m\}$ e $\min\{h, M\}$ sono a scalini (Proposizione 10) e $g \leq \max\{g, m\} \leq f \leq \min\{h, M\} \leq h$ e

$$\int_I (\min\{h, M\} - \max\{g, m\}) \leq \int_I (h - g).$$

Da (21) segue subito la seguente caratterizzazione di integrabilità:

Proposizione 22 (Criterio di integrabilità per successioni)

$f \in \mathcal{R}(I)$ se e solo per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono, $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $\int_I (h_n - g_n) \rightarrow 0$ ed in tal caso $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{R}(I)$. Se $\varepsilon = 1/n$, da (21) segue che esistono $g_n \in S_f^-(I)$ e $h_n \in S_f^+(I)$ tali che $0 \leq \int_I (h_n - g_n) < 1/n$, e dalla definizione di sup e inf e da (19) segue che $\int_I f = \lim \int_I h_n = \lim \int_I g_n$.

Viceversa, dato $\varepsilon > 0$ sia N tale che $\int_I (h_n - g_n) < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$ con $g_n \leq f \leq h_n$ e $g_n, h_n \in S(I)$. Allora vale la (21) con $g = g_N$ e $h = h_N$. ■

Osservazione 23 Le successioni di funzioni $\{g_n\}$ e $\{h_n\}$ possono essere prese rispettivamente crescenti (ossia $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$) e decrescenti (ossia $h_n(x) \geq h_{n+1}(x)$ per ogni $x \in I$).

Dimostrazione Se $\tilde{g}_n \in S_f^-$ e $\tilde{h}_n \in S_n^+$ sono tali che $\lim \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) = 0$, ricordando che il massimo/minimo tra funzioni a scalini è a scalini, possiamo prendere $g_n = \max\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$ e $h_n = \min\{\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n\}$; infatti $\{g_n(x)\}$ è crescente e $\{h_n(x)\}$ decrescente e quindi $h_n - g_n \leq \tilde{h}_n - \tilde{g}_n$ e integrando tale relazione su I si ottiene che $0 \leq \int_I (h_n - g_n) \leq \int_I (\tilde{h}_n - \tilde{g}_n) \rightarrow 0$. ■

Nel prossimo teorema raccogliamo le proprietà fondamentali dell'integrale secondo Riemann.

Teorema 24 (Proprietà dell'integrale di Riemann)

(a) Se $f_1, f_2, g \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, allora appartengono a $\mathcal{R}(I)$ anche le funzioni $af_1 + bf_2$, $f_1 f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$, $\min\{f_1, f_2\}$, f^\pm e $|f|$.

(b) L'integrale di Riemann è un funzionale lineare e positivo su $\mathcal{R}(I)$:

$$\int_I (af_1 + bf_2) = a \int_I f_1 + b \int_I f_2, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{R}(I), \quad (22)$$

$$\int_I f \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{R}(I), f \geq 0. \quad (23)$$

(c) L'integrale di Riemann è additivo: se $f \in \mathcal{R}(I)$, per ogni intervallo $J \subseteq I$, $f \in \mathcal{R}(J)$ e

$$\int_J f = \int_I f \chi_J \quad (24)$$

e se $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ con I_i intervalli allora

$$\int_{I_1} f + \int_{I_2} f = \int_I f. \quad (25)$$

Dimostrazione* Useremo sistematicamente la Proposizione 10. Dividiamo la dimostrazione di (a) in vari passi.

(i) Siano $g_i, h_i \in S(I)$ come nella relazione analoga a (21) con f_i al posto di f e $\varepsilon/2$ al posto di ε . Allora vale (21) con $g := g_1 + g_2, h := h_1 + h_2 \in S$ e $f := f_1 + f_2$ e quindi $f \in \mathcal{R}(I)$.

(ii) Sia $a > 0$. Se $f \in \mathcal{R}(I)$ e vale la (21) con ε/a al posto di ε , allora vale la (21) con ag, af

e ah al posto di g , f e h . Dunque $af \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a > 0$.

(iii) Se vale la (21) allora si ha $-h \leq -f \leq -g$ e $\int_I (-g - (-h)) = \int_I (h - g) < \varepsilon$ ossia $-f \in \mathcal{R}(I)$. Da questa osservazione e da (i) e (ii) segue che $af_1 + bf_2 \in \mathcal{R}(I)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathcal{R}(I)$.

(iv) Dimostriamo che $f^\pm, |f| \in \mathcal{R}(I)$. Si ricordi che la funzione $x \rightarrow x^+$ è crescente e che $x \rightarrow x^-$ è decrescente. Dunque se vale (21), allora $g^+ \leq f^+ \leq h^+$ e $h^+ - g^+ \leq (h^+ - g^+) + (g^- - h^-) = h - g$ e quindi $\int_I (h^+ - g^+) < \varepsilon$, e quindi $f^+ \in \mathcal{R}(I)$. Poiché $f^- = (-f)^+$ da (iii) segue che $f^- \in \mathcal{R}(I)$ e che $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{R}(I)$.

(v) Dal punto precedente, segue che $\max\{f_1, f_2\} = (f_1 - f_2)^+ + f_2 \in \mathcal{R}(I)$. Quindi anche $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\} \in \mathcal{R}(I)$.

(vi) Dimostriamo ora che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $f \geq 0$, allora $f^2 \in \mathcal{R}(I)$. Sia $M = \sup f$ e assumiamo (21) con $\varepsilon/(2M)$ al posto di ε . Per l'Osservazione 21–(iv), possiamo assumere che $g \geq 0$ e $h \leq M$. Allora, $g^2 \leq f^2 \leq h^2$ e $\int_I (h^2 - g^2) = \int_I (h - g)(h + g) \leq 2M \int_I (h - g) < \varepsilon$ e dunque $f^2 \in \mathcal{R}(I)$.

Da questo segue anche che se $f, g \in \mathcal{R}(I)$ e $f, g \geq 0$ allora $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2) \in \mathcal{R}(I)$. Quindi, per qualunque $f \in \mathcal{R}(I)$, $f^2 = (f^+ - f^-)^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2 - 2f^+f^- \in \mathcal{R}(I)$.

Infine, se $f, g \in \mathcal{R}$, $fg = f^+f^- + g^+g^- - f^+g^- - f^-g^+ \in \mathcal{R}(I)$. Questo conclude la dimostrazione di (a).

La (22) segue immediatamente da (a), da (12) e dal fatto che $\int_I f_i = \lim \int_I g_n^{(i)}$ con $g_n^{(i)}$ a scalini.

La (23) segue da (13) e dal fatto che $\int_I f = \lim \int_I g_n$ con $0 \leq g_n \leq f$ a scalini (si ricordi l'Osservazione 21–(iii)). Questo conclude la dimostrazione di (b).

Dimostriamo (c). Siano g_n e h_n come nella Proposizione 22. Allora¹², $g_n\chi_J, h_n\chi_J \in S(J)$, $g_n\chi_J \leq f \leq h_n\chi_J$ su J , e

$$\int_J (h_n\chi_J - g_n\chi_J) = \int_I (h_n\chi_J - g_n\chi_J) \leq \int_I (h_n - g_n) \rightarrow 0.$$

Quindi (Proposizione 22) $f \in \mathcal{R}(J)$ e

$$\int_J f = \lim \int_J g_n\chi_J.$$

D'altra parte, si ha anche $g_n\chi_J \leq f\chi_J \leq h_n\chi_J$ su I e quindi

$$\int_I f\chi_J = \lim \int_I g_n\chi_J = \lim \int_J g_n\chi_J = \int_J f. \quad \blacksquare$$

Es 5 Dimostrare che le funzioni x e x^2 sono integrabili su $(0, 1)$ e calcolarne l'integrale usando la Proposizione 22.

Es 6 (Una funzione a 'infiniti scalini'). Sia $I_n := [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $\{\alpha_n\}$ una successione limitata e $f := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{I_n}$.

Dimostrare che $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ e calcolare $\int_{[0, 1]} f$.

Es 7 Sia $I = [0, 1]$, $Q := \mathbb{Q} \cap I$ e $f = \chi_Q$. Dimostrare che $\mathcal{I}_I^-(f) = 0$ e $\mathcal{I}_I^+(f) = 1$ e quindi che $f \notin \mathcal{R}(I)$.

6 Partizioni di intervalli e somme di Riemann

Definizione 25 Una partizione di un intervallo I è una famiglia $P = \{I_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ finita di intervalli disgiunti I_j tali che $I = \dot{\cup} I_j$. L'insieme di tutte le partizioni di I verrà denotato $\mathcal{P}(I)$. Diremo che la partizione $P = \{I_j\}$ è ordinata se $I_1 \leq \dots \leq I_n$; in tal caso (essendo $I = \dot{\cup} I_j$), se $n > 1$, $\sup I_j = \inf I_{j+1}$, per ogni $1 \leq j \leq n-1$.

Lemma 26 Se $f \in S(I)$ esiste una partizione $P = \{I_j \mid 1 \leq j \leq n\} \in \mathcal{P}(I)$ e numeri reali α_j tali che $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}$.

¹²Si ricordi che $\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$ e si usi la Proposizione 22.

Dimostrazione* Sia $f = \sum_{k=1}^m \alpha_{2k-1} \chi_{I_{2k-1}}$, $I_{2k-1} \subseteq I$, una rappresentazione standard di f (la scelta degli indici solo dispari è fatta per comodità di notazioni). Assumiamo che gli intervalli I_{2k-1} siano ordinati (Osservazione 1–(iii)) e che siano non vuoti. Per ogni $0 \leq k \leq m$ sia I_{2k} l'unico intervallo (eventualmente vuoto) tra¹³ I_{2k-1} e I_{2k+1} . Allora, $\{I_k\}$ è una partizione di I e l'asserto segue ponendo $\alpha_{2k} = 0$ e $n = 2m$. ■

Proposizione 27 (Criterio di integrabilità per partizioni)

$f \in \mathcal{R}(I)$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $P = \{I_j \mid 1 \leq j \leq n\} \in \mathcal{P}(I)$ tale che

$$\sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| < \varepsilon. \quad (26)$$

Dimostrazione * Dato $\varepsilon > 0$ se vale (26), allora vale (21) con

$$g = \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f) \chi_{I_j}, \quad h = \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f) \chi_{I_j}.$$

Viceversa, assumiamo che, dato $\varepsilon > 0$, valga (21) e che le funzioni a scalini g e h siano definite sugli stessi intervalli (cosa che possiamo fare per il Lemma ??). Per il Lemma 26 (e la sua dimostrazione) esiste allora una partizione $P = \{I_j\}$ di I tale che

$$g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j}, \quad h = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{I_j}.$$

Da $g \leq f \leq h$ segue che $\alpha_j \leq \inf_{I_j} f \leq \sup_{I_j} f \leq \beta_j$ e quindi

$$\sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| \leq \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) |I_j| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Dalla Proposizione 27 e dalla definizione di integrale di Riemann segue immediatamente la seguente

Proposizione 28 Se $f \in \mathcal{R}(I)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = \{I_j\}$ di I tale che per ogni scelta di punti $x_j \in I_j$ si ha

$$\left| \int_I f - \sum_{j=1}^n f(x_j) |I_j| \right| < \varepsilon. \quad (27)$$

La somma in (27) viene a volte chiamata *somma di Riemann* (rispetto alla partizione P e alla scelta di punti $\{x_j\}$).

¹³Vedi Es 4.