Criterio di Leibniz per serie a segni alterni

Proposizione 1 Sia $\{a_n\}$ una successione decrescente con $\lim a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ converge (ad un numero non negativo).

Dimostrazione Si considerino le somme parziali pari e dispari date da:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

e si noti che (poiché $\{a_n\}$ è decrescente) i numeri tra parentesi sono non negativi. Quindi: $s_{2n} \geq 0$; $\{s_{2n}\}$ è crescente; $\{s_{2n+1}\}$ è decrescente. Inoltre $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ e dunque $s_{2n} \leq s_{2n+1}$. In particolare $0 \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq a_1$. Dunque (per il teorema sui limiti delle funzioni monotone)

$$0 \leq \lim s_{2n} = \sup s_{2n} \leq \inf s_{2n+1} = \lim s_{2n+1} \leq a_1,$$

e poiché $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ e $\lim a_{2n+1} = 0$, si ha che $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$ e da questo segue la tesi. ■

Esercizio Si dimostri che data una successione $\{a_n\}$ se $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = L \in \mathbb{R}^*$, allora $\lim a_n = L$.