1 Il Teorema di Weierstrass su intervalli

Teorema 1 *Sia $I = [a, b] = \{x \big| a \le x \le b\}$ con*[1] $-\infty < a < b < \infty$ *e $f \in C(I)$. Allora f assume massimo (e minimo) su I, ossia esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) \ge f(x)$ (rispettivamente, $f(x_0) \le f(x)$), per ogni $x \in I$.*

Nella dimostrazione di questo importante risultato dovuto a Weierstrass useremo il seguente

Lemma 2 *Nelle ipotesi del Teorema 1, f è limitata su I, ossia, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in I$.*

Dimostrazione Poiché f è continua in b, esiste $b_1 \in (a, b)$ tale che $|f(x) - f(b)| < 1$ per ogni $b_1 < x \le b$ e quindi

$$|f(x)| = |f(x) - f(b) + f(b)| \le |f(x) - f(b)| + |f(b)| < 1 + |f(b)| =: C_1 \, , \quad \forall \; b_1 < x \le b \, .$$

Sia, ora,

$$E := \{y \in I \big| \, \exists \; C > 0 \text{ per cui } |f(x)| \le C \, , \forall \; a \le x \le y\} \, .$$

Chiaramente $a \in E$ e $E \subseteq I$; quindi E è un insieme limitato e non vuoto. Sia $c = \sup E \le b$. Assumiamo (per assurdo) che $c < b$. Poiché f è continua in c esiste $0 < \delta < b - c$ tale che $|f(x) - f(c)| < 1$ se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ e (come sopra) $|f(x)| < 1 + |f(c)|$ per ogni $c \le x \le c + \delta$; ma allora f sarebbe limitata su $[a, c + \delta]$ il che contraddice il fatto che c è un maggiorante di E. Dunque $c = b$. Dalla definizione di estremo superiore, segue che, se fissiamo $b_1 < b_2 < b$, f è limitata su $[a, b_2]$, ossia, esiste $C_2 > 0$ tale che $|f(x)| \le C_2$ per ogni $a \le x \le b_2$. La tesi segue prendendo $M = \max\{C_1, C_2\}$. ∎

Dimostrazione (del Teorema 1) Dimostriamo prima che f ha massimo su I.
Sia $M = \sup\{f(x) \big| x \in I\}$. Dal Lemma 2 segue che $M < +\infty$. Supponiamo (per assurdo) che f non assuma massimo in I, ossia che $f(x) < M$ per ogni $x \in I$. In tal caso la funzione $F(x) = (M - f(x)^{-1}$ è una funzione continua su I e dunque, per il Lemma 2 (applicato a F) F è limitata su I. D'altra parte, dalla definizione di estremo superiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in I$ tale che $M - \varepsilon < f(x)$, il che equivale a $F(x) > 1/\varepsilon$; ma questo, essendo ε arbitrario, vuol dire che f non è limitata superiormente su I, il che contraddice il Lemma 2 (applicato a F). Dunque deve esistere x_0 tale che $f(x_0) = M$.
Applicando quanto dimostrato alla funzione continua $-f$, si ha che f ha anche minimo su I (che coincide col massimo di $-f$). ∎

[1] Si noti che nel caso l'intervallo I sia un singleton, ossia $I = [a, a]$, la tesi del teorema è banalmente vera.