Cardinalità

Definizione 1 *Due insiemi non vuoti A e B si dicono in* **corrispondenza biunivoca** *se esiste una biiezione*[1] *tra A e B; in tal caso scriveremo*[2] $A \cong B$.
Un insieme A si dice **finito** *se è vuoto oppure esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{F}_n \cong A$, dove*

$$\mathscr{F}_n := \{i \in \mathbb{N} \big| \, i \le n\} \, .$$

Un insieme si dice **infinito** *(o "di cardinalità infinita") se non è finito.*

Dimostriamo che per ogni insieme finito non vuoto A esiste un *unico* $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{F}_n \cong A$.

Lemma 2 *Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e $f : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ una funzione iniettiva. Allora, esiste una funzione $\sigma : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ strettamente crescente (se $n \ge 2$) e tale che $\sigma(\mathscr{F}_n) = f(\mathscr{F}_n)$.*

Dimostrazione L'enunciato è non banale solo se $n \ge 2$. Per $n = 2$, si hanno due casi: o $f(1) < f(2)$, nel qual caso l'enunciato è vero con $\sigma = f$, oppure, $f(2) < f(1)$, nel qual caso l'enunciato è vero con $\sigma(1) = f(2)$ e $\sigma(2) = f(1)$. Assumiamo, ora, l'enunciato vero per $n \ge 2$ e sia $f : \mathscr{F}_{n+1} \to \mathscr{F}_m$ una funzione iniettiva. Sia $\tilde{f} : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ la restrizione di f a[3] $\mathscr{F}_n$. Per l'ipotesi induttiva, esiste $\tilde{\sigma} : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ strettamente crescente e tale che $\tilde{\sigma}(\mathscr{F}_n) = \tilde{f}(\mathscr{F}_n) = f(\mathscr{F}_n)$. Sia $p = f(n+1)$. Poiché f è iniettiva, $p \notin f(\mathscr{F}_n) = \tilde{\sigma}(\mathscr{F}_n)$ e quindi si hanno tre casi: (i) $p > \tilde{\sigma}(n)$; (ii) $p < \tilde{\sigma}(1)$, oppure (iii) esiste $2 \le j \le n$ tale che $\tilde{\sigma}(j-1) < p < \tilde{\sigma}(j)$. Nel caso (i) poniamo $\sigma(i) = \tilde{\sigma}(i)$ per $i \le n$ e $\sigma(n+1) = p$; nel caso (ii) poniamo $\sigma(1) = p$ e $\sigma(i) = \tilde{\sigma}(i-1)$ per $2 \le i \le n+1$; infine, nel caso (iii) poniamo $\sigma(i) = \tilde{\sigma}(i)$ per $i \le j-1$, $\sigma(j) = p$, e $\sigma(i) = \tilde{\sigma}(i-1)$ per $j+1 \le i \le n+1$. ∎

Lemma 3 *Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e $\sigma : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ una funzione strettamente crescente. Allora $n \le m$.*

Dimostrazione Induzione su n. Per $n = 1$ l'enunciato è (banalmente) vero. Assumiamo l'enunciato vero e sia $\sigma : \mathscr{F}_{n+1} \to \mathscr{F}_m$ una funzione strettamente crescente. Essendo $\sigma(n+1) > \sigma(n) \ge n$, si ha che[4] $\sigma(n+1) \ge n+1$ e quindi (essendo $\sigma(i) \le m$ per ogni i) $m \ge n+1$. ∎

Mettendo assieme i lemmi 2 e 3 segue immediatamente

Lemma 4 *Siano $n, m \in \mathbb{N}$ e $f : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ una funzione iniettiva. Allora, $n \le m$.*

Corollario 5 (i) *Se $\phi : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ è una biiezione, allora $n = m$.*
(ii) *Se A è finito esiste un unico $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{F}_n \cong A$.*

Dimostrazione (i): $\phi : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ iniettiva implica $n \le m$ e $\phi^{-1} : \mathscr{F}_m \to \mathscr{F}_n$ iniettiva, implica $m \le n$ e quindi $n = m$.
(ii): Se $\phi_1 : \mathscr{F}_n \to A$ e $\phi_2 : \mathscr{F}_m \to A$ sono biiezioni, allora $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_m$ è una biiezione e quindi $n = m$ per (i). ∎

Definizione 6 *Se A è un inseme finito non vuoto l'unico $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{F}_n \cong A$ si chiama* **cardinalità** *di A e si scrive $\#A := n$. Si pone, poi, $\#\varnothing := 0$ e $\#A := \infty$ se A è un insieme infinito.*

Esempio 7 (i) $\mathscr{F}_n$ è un insieme finito per ogni $n \in \mathbb{N}$ (come biiezione si può prendere l'identità) ed ha cardinalità n.
(ii) $\mathbb{N}$ è *infinito*: infatti se, per assurdo, $\mathbb{N}$ fosse finito esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ e una biiezione $\phi : i \in \mathscr{F}_n \mapsto \phi(i) \in \mathbb{N}$; ma allora il numero naturale $m = 1 + \sum_{i=1}^{n} \phi(i) > \phi(j)$ per ogni $j \in \mathscr{F}_n$ e quindi sarebbe diverso da ogni numero naturale, portando ad una contraddizione. ∎

---

[1] Ossia, esiste $\phi : A \to B$ iniettiva e suriettiva.
[2] Chiaramente, $\cong$ è una relazione di equivalenza.
[3] ossia $\tilde{f}(i) := f(i)$ per ogni $i \le n$
[4] Corollario 1.26 di [C].

Definizione 8 *Un insieme in corrispondenza biunivoca con* $\mathbb{N}$ *si dice* **numerabile**.

In altri termini, *un insieme A è numerabile se e solo se è l'immagine di una successione iniettiva $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in A$.*

Osservazione 9 (i) Chiaramente, *se E_n, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi finiti non vuoti e a due a due disgiunti, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è numerabile*[5].

Più interessante è osservare che[6]:

(ii) *Se A e B sono numerabili, allora $A \times B$ è numerabile*;

(iii) *Se E_n sono insiemi numerabili allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è numerabile.*

Per quanto riguarda la cardinalità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si ha:

Proposizione 10 (i) $\mathbb{Q}$ *è numerabile.*
(ii) $\mathbb{R}$ *è infinito ma non è numerabile.*

Dimostrazione (i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$A_n := \Big\{ r = m + \frac{p}{q} \text{ t.c. } q \in \mathbb{N}; m, p \in \mathbb{Z} \text{ e } |m| \le n\,,\ |p| < q \le n \Big\}\,. \tag{1}$$

Chiaramente, per ogni n, A_n è un sottoinsieme finito di[7] $\mathbb{Q}$ e per ogni $r = p/q \in \mathbb{Q}$ (con $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$), $r \in A_n$ con[8] $n = \max\{[r], q\}$. Dunque, se definiamo ricorsivamente $E_1 := A_1$ e $E_n := A_n \backslash A_{n-1}$, si ha che $\mathbb{Q} = \dot\cup_n E_n$ e dunque, per l'Osservazione 9–(i), $\mathbb{Q}$ è numerabile.

(ii) Basta dimostrare che *l'intervallo*[9] $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \big| 0 \le x \le 1\}$ *non è numerabile*[10].

Supponiamo, per assurdo, che $[0,1]$ sia numerabile, ossia, che $[0,1] = \{x_n \big| n \in \mathbb{N}\}$ con $x_n \ne x_m$ se $n \ne m$.
Definiamo l'intervallo $I_1 \subseteq [0,1]$ come segue: se $x_1 \ge 1/2$ poniamo $I_1 := [a_1, b_1] := [0, 1/3]$, mentre, se $x_1 < 1/2$, poniamo $I_1 := [a_1, b_1] := [2/3, 1]$. Chiaramente, $0 \le a_1 < b_1 \le 1$ e $x_1 \notin I_1$.
Iteriamo: dato $j \ge 2$ e dato l'intervallo $I_{j-1} := [a_{j-1}, b_{j-1}] \subseteq [0,1]$, definiamo $I_j \subseteq I_{j-1}$ come segue:

$$I_j := \begin{cases} [a_j, b_j] := \Big[a_{j-1}, a_{j-1} + \dfrac{1}{3^j}\Big]\,, & \text{se } x_j \ge \dfrac{a_{j-1} + b_{j-1}}{2}\,, \\[2ex] [a_j, b_j] := \Big[b_{j-1} - \dfrac{1}{3^j}, b_{j-1}\Big]\,, & \text{se } x_j < \dfrac{a_{j-1} + b_{j-1}}{2}\,. \end{cases}$$

Si noti che

$$I_j \subseteq I_{j-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1 \subseteq [0,1]\,, \quad x_j \notin I_j\,,\ \forall\, j \ge 1\,, \tag{2}$$
$$0 \le a_n \le a_j \le b_n \le 1\,, \qquad \forall\, j \ge n\,. \tag{3}$$

Sia $\alpha = \sup\{a_n \big| n \in \mathbb{N}\}$. Da (3) segue che $\alpha \in I_n \subseteq [0,1]$ per ogni n. Poiché $x_n \notin I_n$, si ha che $\alpha \ne x_n$ per ogni n, il che contraddice l'ipotesi che $[0,1] = \{x_n \big| n \in \mathbb{N}\}$. ∎

---

[5] Es. 1.
[6] Es. 2 e 3.
[7] Ad esempio, $A_1 = \{0, \pm 1\}$ e $A_2 = \big\{0, \pm\frac12, \pm 1, \pm\frac32, \pm 2, \pm\frac52\big\}$.
[8] Es. 4.
[9] In generale, se $a < b$ sono numeri reali, $[a,b]$ denota 'l'intervallo chiuso di estremi a e b' ossia l'insieme definito come $\{x \in \mathbb{R} \big| a \le x \le b\}$.
[10] Un sottoinsieme di un insieme numerabile è al più numerabile (e quindi se $[0,1]$ non è numerabile, non lo è neanche $\mathbb{R}$). (Ovviamente $[0,1]$ non è finito!)

Esercizi

Es. 1 Dimostrare il punto (i) dell'Osservazione 9.

Es. 2 Dimostrare che *se A e B sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile.*

[**Suggerimento:** Siano A e B le immagini, rispettivamente, di due successioni iniettive $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$; siano $A_n = \{(x_i, y_j) \big| \, i, j \le n\}$, $E_n = A_n \backslash A_{n-1}$ $(A_0 := \varnothing)$, e si usi l'Es. 1]

Es. 3 Si dimostrino le seguenti affermazioni:

(i) *Se E_n, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi numerabili a due a due disgiunti, allora $\cup_n E_n$ è numerabile.*

[**Suggerimento:** $\forall\, n$, $E_n = \{x_i^{(n)} \big| \, i \in \mathbb{N}\}$ con $\{x_i^{(n)}\}$ successione iniettiva e $\cup E_n = \{x_i^{(n)} \big| \, (n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$.]

(ii) *Se E_n, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi finiti o numerabili , allora $\cup_n E_n$ è un insieme finito o numerabile.*

Es. 4 Si dimostri che se $r = p/q \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$), allora $r = m + p'/q$ con $m = [r]$ e $p' \in \mathbb{Z}$, $|p'| < q$.

Es. 5* Dimostrare che $\#A = \infty$ *se e solo se A contiene un insieme numerabile B.*

Es. 6* [Dedekind] Dimostrare che $\#A = \infty$ *se e solo se A può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, ossia, $\exists B \subsetneq A$ tale che $A \cong B$.*