Alcuni risultati relativi a e

1 Relazioni tra e ed il fattoriale

Si ricorda[1] che, se si definisce,

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{1}$$

allora la successione $\{e_n\}$ è strettamente crescente e la successione $\{E_n\}$ è strettamente decrescente e il limite comune è per definizione i numero e:

$$e_n \nearrow\ e\ \swarrow E_n\,. \tag{2}$$

Lemma 1

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e \le n! \le \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e\ n\,, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Dimostrazione Le relazioni in (3) sono vere per $n = 1$ (col segno di uguale).
Dimostriamo la prima disuguaglianza per induzione: assumiamo tale disuguaglianza vera per $n \ge 1$ e dimostriamola per $n+1$:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{(3)}{\le} (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ \frac{n!}{e} = (n+1)!\ \frac{e_n}{e} \overset{(2)}{<} (n+1)!\,.$$

Analogamente, assumiamo la seconda disuguaglianza in (3) vera per $n \ge 1$ e dimostriamola per $n+1$:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot e\ (n+1) = \frac{E_{n+1}}{e}\left(\frac{n}{e}\right)^n n\,e\,(n+1) \overset{(2)}{>} \left(\frac{n}{e}\right)^n n\,e\,(n+1) \overset{(3)}{\ge} (n+1)! \qquad \blacksquare$$

La (3) può essere riscritta come

$$\frac{e^{n-1}}{n} \le \frac{n^n}{n!} \le e^{n-1}$$

relazione che, prendendo la radice n–ma, è equivalente a

$$\frac{e}{(en)^{\frac{1}{n}}} \le \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{e}{e^{\frac{1}{n}}}\,,$$

da cui, prendendo il limite per $n \to +\infty$, segue il seguente limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}\,. \tag{4}$$

Osservazione 2 Una relazione ben più precisa della (3) è data dalla seguente *formula di Stirling*:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,, \tag{5}$$

la cui dimostrazione, però, è ben più delicata della dimostrazione di[2] (3).

2 Irrazionalità di e

Un altro importante limite notevole legato ad e segue dall'identità[3]

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad (\forall\ x \in \mathbb{R})\,,$$

[1] Cfr. Lemma 2.36, [C]

[2] Cfr. Appendice A.3 in [C], dove si dimostra che $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{c_n}{\sqrt{n}}\right)$ con $|c_n| < 1/2\pi$.

[3] Cfr.Teorema 5.3 [C].

che implica, in particolare,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \,. \tag{6}$$

Da tale limite segue una semplice dimostrazione dell'irrazionalità di e.

Lemma 3 *Vale la seguente disuguaglianza*

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,, \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}_0\,. \tag{7}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(q+1)!}\Big(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+3)(q+2)} + \cdots\Big) \\ &< \frac{1}{(q+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+2)^k} \\ &= \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4 *e è irrazionale.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Allora, si avrebbe

$$N := q!\Big(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\Big) = q!\Big(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\Big) = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}\,,$$

e, d'altra parte,

$$N \overset{(6)}{=} q! \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \overset{(7)}{<} \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1\,,$$

il che, essendo $N > 0$, è una contraddizione, non esistendo alcun numero intero in $(0, 1)$. $\blacksquare$

3 Divergenza della serie armonica

Il prossimo lemma descrive la velocità di divergenza della serie armonica:

Lemma 5

$$\frac{1}{n} + \log n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \log n\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{8}$$

Dimostrazione Le relazioni in (8) sono vere per $n = 1$ (col segno di uguale).
Dimostriamo la prima disuguaglianza per induzione: assumiamo tale disuguaglianza vera per $n \ge 1$ e dimostriamola per $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{(8)}{\ge} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \log n > \frac{1}{n+1} + \log(n+1)\,,$$

essendo l'ultima relazione equivalente a $\log e_n < 1$, relazione vera essendo $e_n < e$ e il logaritmo una funzione strettamente crescente.

Analogamente, assumiamo la seconda disuguaglianza in (8) vera per $n \geq 1$ e dimostriamola per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \overset{(8)}{\leq} \frac{1}{n+1} + 1 + \log n < 1 + \log(n+1)\,,$$

essendo l'ultima relazione equivalente a $\log E_n > 1$, relazione vera essendo $E_n > e$ e il logaritmo una funzione strettamente crescente. ∎

Osservazione 6 (i) In particolare la (8) implica che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n\,. \tag{9}$$

(ii) (*La costante di Eulero–Mascheroni*) Se definiamo $\gamma_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$, la (8) può essere riscritta come

$$\frac{1}{n} \leq \gamma_n \leq 1\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad \Big(\gamma_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big). \tag{10}$$

Poiché $\gamma_n = \gamma_{n+1} + \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n+1}$ e $\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n+1} > 0$ (essendo tale relazione equivalente a $\log E_n > 1$) segue che $\{\gamma_n\}$ è strettamente decrescente. Quindi esiste il limite $\gamma = \lim \gamma_n = \inf \gamma_n$: tale limite è un numero positivo e prende il nome di *costante di Eulero–Mascheroni*[4].

4 Convergenza della funzione $\zeta(s)$ di Riemann per s reali

La funzione $\zeta(s)$ di Riemann è definita come

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\,. \tag{11}$$

Lemma 7 *La serie in (11) per $s \in \mathbb{R}$ converge se e solo se $s > 1$.*

Dimostrazione Poiché $\dfrac{1}{k^s} \geq \dfrac{1}{k}$ se $s \leq 1$ e la serie armonica $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge per il Lemma 5, segue che $\zeta(s) = +\infty$ per ogni $s \leq 1$. Sia ora $s > 1$ e poniamo $\varepsilon = s - 1 > 0$. Dal limite notevole $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ per $x \to 0$ segue che

$$\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\varepsilon - 1\Big) \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{n} \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

Quindi (criterio del confronto asintotico) la serie $\sum \dfrac{1}{n^s} = \sum \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ si comporta come la serie $\sum \Big(\dfrac{1}{n^\varepsilon} - \dfrac{1}{(n+1)^\varepsilon}\Big)$, ma tale serie è una serie telescopica e

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\Big) = 1 - \frac{1}{(N+1)^\varepsilon} \to 1\,,$$

il che mostra che la serie $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ converge per ogni $s > 1$. ∎

---

[4] $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\log(k+1) - \log k\Big) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ con $a_k = \frac{1}{k} - \log\big(1 + \frac{1}{k}\big)$. Poiché $a_k > 0$ (essendo tale relazione equivalente a $\log e_k < 1$) e la serie è limitata (essendo $\gamma_n \leq 1$) segue che $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} a_k > 0$. Il valore numerico di γ è circa $0,5772156649\ldots.$ Non è noto se γ sia razionale o irrazionale; per maggiori informazioni, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_constant.