Funzioni convesse

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I; diremo che f è **convessa su** I *se* f' *è crescente su*[1] I.

Le proprietà geometriche di una funzione convessa sono raccolte nel seguente

Teorema 1 *Una funzione f derivabile su un intervallo I convessa soddisfa le seguenti relazioni*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,, \qquad \forall\ x, x_0 \ \text{ in } I\,; \tag{1}$$

$$f(x) \leq f(x_1) + (x - x_1)\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,, \qquad \forall\ x_1 < x < x_2 \ \text{ in } I\,. \tag{2}$$

Osservazione 2 La (1) esprime il fatto che il grafico di f è tutto al di sopra di una sua qualunque retta tangente; la (2), invece, esprime il fatto che il grafico di f tra due punti qualunque $x_1 < x_2$ dell'intervallo I è tutto al di sotto della secante passante per i punti del grafico di ascissa x_i.

Dimostrazione Sia $F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Allora, $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $F'(x_0) = 0$; inoltre, essendo f' è crescente, si ha che $F'(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$ e $F'(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$: dunque x_0 è un punto di minimo per F, ossia, poichè $F(x_0) = 0$, $F \geq 0$ su I il che equivale a (1).

Per dimostrare la (2), osserviamo che dal Teorema di Lagrange segue che esistono ξ_i tali che $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ e

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)\,, \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)\,. \tag{3}$$

Essendo f' crescente si ha $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, ossia, per (3),

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\,, \tag{4}$$

relazione (essendo $(x_1 < x < x_2)$ equivalente a

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_1)\ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= f(x_1)\ \frac{(x_2 - x_1) + (x_1 - x)}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= f(x_1) + (x - x_1)\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una funzione derivabile $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, si dice **strettamente convessa su** I *se* f' *è strettamente crescente su* I. È facile vedere che in tal caso valgono le disuguaglianza strette in (1) (per $x \neq x_0$) e in[2] (2).

Infine, una funzione f si dice [strettamente] **concava** se $-f$ è [strettamente] convessa.

Osservazione 3 (i) Ovviamente, *se f è derivabile due volte su I e $f'' \geq 0$ su I, allora f' è crescente e dunque f è convessa.*

(ii) È facile vedere che[3] *se una funzione differenziabile su I soddisfa* (1), *allora f' è crescente* (e quindi è convessa).

(iii) Si noti che la relazione (2) non coinvolge la derivata di f: infatti (2) *può essere presa come definizione di funzione convessa per una arbitraria funzione* $f : I \to \mathbb{R}$: cfr. Es. 4.

(iv) Nel caso di funzioni strettamente convesse, le affermazione dei punti precedenti valgono con le disuguaglianza strette (nella (1), $x \neq x_0$).

---

[1] Ossia, $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ per ogni $x_1 \leq x_2$ in I.

[2] Es. 1.

[3] Es. 2.

Esercizi

Es. 1 Dimostrare che se f è una funzione derivabile su I intervallo, strettamente convessa, allora valgono le disuguaglianza strette in (1) (per $x \neq x_0$) e in (2).

Es. 2 Dimostrare l'affermazione in (ii) , Osservazione 3.

Es. 3 Dimostrare che (2) equivale a[4] $R_f(x_1, x) \leq R_f(x_2, x)$ per ogni $x_1 < x < x_2$ punti di I.

Es. 4 Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, una funzione che soddisfi (2).
Dimostrare le seguenti affermazioni:

(i) f *ammette derivata sinistra e derivata destra* (in ogni punto di accumulazione, rispettivamente, sinistro e destro) *e* $D_- f(x) \leq D_+ f(x)$ (in ogni punto di accumulazione sinistro e destro).

(ii) f *è continua*.

(iii) *se* f *è derivabile su* I *allora vale* (1).

Es. 5 Siano $a < b < c$ e f derivabile e convessa su (a, b) e su (b, c) e continua in b. Dimostrare che se $D_- f(b) \leq D_+ f(b)$, allora f soddisfa (2) su (a, b).

[4]Per $x \neq y$, $R_f(x, y)$ denota il rapporto incrementale $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$.