Funzioni esponenziali

Ricordiamo che ogni $a, b > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, si ha[1]

$$a^{x+y} = a^x a^y\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,; \qquad a^x b^x = (ab)^x\,. \tag{1}$$

Sia ora $a > 1$ e consideriamo la funzione

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto f(x) := a^x \in (0, +\infty)\,, \qquad (a > 1)\,.$$

Essendo $a > 1$, f *è strettamente crescente*[2] e dunque *esistono i limiti laterali* $\lim_{x\to x_0\pm} f(x)$ *per ogni* $x_0 \in \mathscr{D}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\left\{a^x \middle| \, x \in \mathbb{Q}\,, x < x_0\right\}, \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf\left\{a^x \middle| \, x \in \mathbb{Q}\,, x > x_0\right\}. \tag{2}$$

Inoltre per $a > 1$ e $m \in \mathbb{Z}$ si ha[3]

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{Q}}} \frac{a^x}{x^m} = +\infty\,, \qquad (m \in \mathbb{Z}\,,\ a > 1)\,. \tag{3}$$

Infatti, i limiti laterali di f coincidono:

Lemma *Per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{\substack{x<x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} a^x = \inf_{\substack{x>x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} a^x$.

Dimostrazione Siano $A_- := \left\{a^x \middle| \, x \in \mathbb{Q}\,, x < x_0\right\}$ e $A_+ := \left\{a^x \middle| \, x \in \mathbb{Q}\,, x > x_0\right\}$. Poichè la funzione $x \in \mathbb{Q} \mapsto f(x) = a^x$ è strettamente crescente si ha che $A_- \le A_+$ e dunque la tesi è equivalente a mostrare che gli insiemi A_- e A_+ sono contigui. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che[4] $m > x_0$. Poiché[5] $a^{\frac{1}{n}} \to 1$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $1 < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon/a^m$. Per la denistà dei razionali in $\mathbb{R}$, esistono due razionali $x < x_0 < y$ tali che $y - x < 1/N$ e per tali razionali si ha

$$0 < a^y - a^x \overset{(1)}{=} a^x\big(a^{y-x} - 1\big) < a^m\big(a^{\frac{1}{N}} - 1\big) < \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 1 $f \in C(\mathbb{Q})$. Infatti se $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\sup_{\substack{x<x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} a^x \le a^{x_0} \le \inf_{\substack{x>x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} a^x$ e per il Lemma si devono avere le uguaglianze.

È ora naturale estendere "per continuità" la definizione di $f(x) = a^x$ a tutti i numeri reali, ponendo:

Definizione *Se* $x \in \mathbb{Q}^c$ *poniamo* $a^x := \lim_{\substack{t\to x\\ t\in\mathbb{Q}}} a^t$. *Se* $0 < a \le 1$ *poniamo*[6] $a^x := 1/(a^{-1})^x$.

La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ *prende il nome di funzione esponenziale in base* a.

Dimostriamo le proprietà rilevanti della funzione esponenziale $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$.

(a) *La funzione esponenziale con base* $a > 1$ *è strettamente crescente, con base* $0 < a < 1$ *è strettamente decrescente.*

Dimostrazione Se $a > 1$, dati $x < y$, siano r e s due razionali tali che $x < r < s < y$, allora

$$a^x = \sup_{\substack{t<x\\ t\in\mathbb{Q}}} a^t \le a^r < a^s \le \inf_{\substack{t>y\\ t\in\mathbb{Q}}} a^t = a^y\,,$$

---

[1] Cfr. Proposizione 1.111 in [C].

[2] Eq. (1.74) di [C].

[3] Segue da $\dfrac{a^x}{x^n} \ge \dfrac{a^{[x]}}{([x]+1)^n}$, dal limite notevole $a^n/n^m \to +\infty$, e dal teorema sulla composizione dei limiti.

[4] Proprietà archimedea.

[5] Proposizione 2.35–(iv).

[6] Ovviamente, $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

e quindi, $a^x < a^y$. La stretta decrescenza di a^x per $0 < a < 1$ segue dalla definizione e dal fatto che il reciproco di una funzione strettamente crescente è strettamente decrescente. $\blacksquare$

(b) *La funzione esponenziale è continua.*
Dimostrazione Sia $a > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $\{x_n\}$ una qualunque successione di numeri reali con limite x_0. Siano s_n, t_n numeri razionali tali che $x_n - 1/n < s_n < x_n < t_n < x_n + 1/n$; allora, $\lim s_n = \lim t_n = x_0$. Per (a) si ha che $a^{s_n} < a^{x_n} < a^{t_n}$ e poiché $\lim a^{s_n} = \lim a^{t_n} = a^{x_0}$, dal teorema del confronto segue che $\lim a^{x_n} = a^{x_0}$ e per il teorema ponte si ha la tesi.
Infine se $a \in (0, 1)$, $a^x = 1/a^{-x}$ è continua[7]. $\blacksquare$

(c) $\forall\ a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $a^{x+y} = a^x a^y$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a^x b^x = (ab)^x$.
Dimostrazione Siano s_n, t_n razionali tali che $s_n \to x$ e $t_n \to y$. Allora[8],

$$a^{x+y} = \lim a^{s_n + t_n} = \lim a^{s_n} a^{t_n} = a^x a^y\,.$$

Analogamente,

$$a^x b^x = \lim a^{s_n} b^{s_n} = \lim (ab)^{s_n} = (ab)^x\,. \quad \blacksquare$$

Osservazione 2 Da (c) e dalla definizione di esponenziale segue che[9]

$$a^{-x} = (a^x)^{-1} = (a^{-1})^x\,, \qquad \forall a > 0\,, x \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

(d) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.
Dimostrazione Per $y = 0$ o $x = 0$ la tesi è vera. Siano ora $x, y > 0$ e $a > 1$ e siano s_n, t_n razionali positivi tali che $s_n \nearrow x$ e $t_n \nearrow y$. Allora[10],

$$(a^{s_n})^{t_n} < (a^x)^{t_n} \to (a^x)^y\,;$$

d'altra parte $(a^{s_n})^{t_n} = a^{s_n t_n} \to a^{xy}$ e quindi, per il teorema del confronto, $a^{xy} \le (a^x)^y$. Analogamente, se s_n, t_n sono razionali tali che $s_n \searrow x$ e $t_n \searrow y$. Allora

$$a^{s_n t_n} = (a^{s_n})^{t_n} > (a^x)^{t_n} \to (a^x)^y\,,$$

e passando al limite si ha $a^{xy} \ge (a^x)^y$, che assieme alla disuguaglianza precedente implica la tesi nel caso $x, y > 0$. Il caso generale segue passando ai denominatori quando occorre ed usando la (4). $\blacksquare$

Esercizio Dimostrare che $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha a^x = +\infty$ e se $a < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha a^x = 0$.

[7] Essendo la composizione di funzioni continue continua.
[8] Giustificare ogni passaggio!
[9] La prima uguaglianza segue da $a^x a^{-x} = a^0 = 1$; la seconda segue da $a^x (a^{-1})^x = (aa^{-1})^x = 1^x = 1$.
[10] Se $0 < A < B$ e $x > 0$, allora $A^x < B^x$ essendo equivalente a $(B/A)^x > 1$.