Limiti laterali e funzione monotòne

Nella definizioni che seguono $a, x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Definizione 1 *Un 'intorno sinistro' di $x_0 > -\infty$ è un intervallo della forma (a, x_0) con $a < x_0$.*
Un 'intorno destro' di $x_0 < +\infty$ è un intervallo della forma (x_0, a) con $a > x_0$.
$x_0 > -\infty$ è un 'punto di accumulazione da sinistra' per A se

$$\forall\ U \text{ intorno sinistro di } x_0\,, \quad U \cap A \neq \varnothing\,.$$

$x_0 < +\infty$ è un 'punto di accumulazione da destra' per A se

$$\forall\ U \text{ intorno destro di } x_0\,, \quad U \cap A \neq \varnothing\,.$$

L'insieme dei punti di accumulazione in $\mathbb{R}^*$ da sinistra di A si denota $\mathscr{D}^*_- A$; l'insieme dei punti di accumulazione in $\mathbb{R}^*$ da destra di A si denota $\mathscr{D}^*_+ A$; la notazione senza asterisco indica i punti di accumulazione finiti (ossia in $\mathbb{R}$).

Si noti che

$$\mathscr{D}^* A = \mathscr{D}^*_- A \cup \mathscr{D}^*_+ A\,.$$

Sia ora $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.

Definizione 2 *Sia $x_0 \in \mathscr{D}^*_- A$ e $L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che $L = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ ('L è il limite di f per x che tende a x_0 da sinistra') se*

$$\forall\ V \text{ intorno di } \ L \quad \exists\ U \text{ intorno sinistro di } x_0 \big|\ f(x) \in V\,,\ \forall\ x \in U \cap A\,. \tag{1}$$

Sia $x_0 \in \mathscr{D}^*_+ A$ e $L \in \mathbb{R}^*$. Diremo che $L = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ ('L è il limite di f per x che tende a x_0 da destra') se

$$\forall\ V \text{ intorno di } \ L \quad \exists\ U \text{ intorno destro di } x_0 \big|\ f(x) \in V\,,\ \forall\ x \in U \cap A\,. \tag{2}$$

Definizione 3 *Si dice che f 'conserva l'ordine' o che 'è crescente' se*

$$x, y \in A\,, \quad x \le y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \le f(y)\,.$$

si dice che f 'inverte l'ordine' o è 'decrescente' se

$$x, y \in A\,, \quad x \le y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \ge f(y)\,.$$

f si dice monotòna se è crescente o decrescente.
f si dice 'strettamente monotòna' [crescente, decrescente] se è monotòna [crescente, decrescente] e iniettiva[1].

Teorema 4 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora*[2]*,*

$$x_0 \in \mathscr{D}^*_- A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup_{A \cap (-\infty, x_0)} f\,. \tag{3}$$

$$x_0 \in \mathscr{D}^*_+ A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{A \cap (x_0, +\infty)} f\,. \tag{4}$$

[1] f iniettiva $\iff$ $f(x) = f(y) \implies x = y$.
[2] Notazione: $\sup\limits_B f := \sup\{f(x) \big| x \in B\}$; $\inf\limits_B f := \inf\{f(x) \big| x \in B\}$

Dimostrazione Dimostriamo[3] (3). Sia $L := \sup_{A\cap(-\infty,x_0)} f > -\infty$ e sia V un intorno di L, ossia $L = (a, b)$ con $a < L < b$ se $L \in \mathbb{R}$ e $V = (a, +\infty)$ se $L = +\infty$. Per la caratterizzazione di estremo superiore segue che esiste $\bar{x} \in A \cap (-\infty, x_0)$ tale che $a < f(\bar{x})$. Poiché f è crescente, per ogni $x \in A$ con $\bar{x} < x < x_0$, si ha

$$a < f(\bar{x}) \le f(x) \le L$$

e, quindi $f(x) \in V$ e la (1) segue con $U := (\bar{x}, x_0)$. ∎

Es 1 Si dimostri che se $x_0 \in \mathscr{D}_- A \cap \mathscr{D}_+ A$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = L\,.$$

Es 2 Si dimostri la (4).

Es 3 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione decrescente. Si dimostri che

$$x_0 \in \mathscr{D}^*_- A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \inf_{A\cap(-\infty,x_0)} f\,, \tag{5}$$

$$x_0 \in \mathscr{D}^*_+ A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = \sup_{A\cap(x_0,+\infty)} f\,. \tag{6}$$

Es 4 (i) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathscr{D}_- A$ [risp., $x_0 \in \mathscr{D}_+ A$]. Dimostrare che se $\lim_{x\to x_0-} f = L \in \mathbb{R}$ [risp., $\lim_{x\to x_0+} f = L \in \mathbb{R}$], allora si ha che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno sinistro [risp., destro] U di x_0 tale che

$$\sup_{A\cap U} f - \inf_{A\cap U} f < \varepsilon\,.$$

(ii) Dimostrare che, in nessun punto, esistono i limiti laterali di $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

[3] La dimostrazione di (4) è analoga e viene lasciata per esercizio (Es 2).