1 Limite superiore e inferiore

Definizione 1 *Data una successione* $\{a_n\}$, *definiamo, per ogni* $n \geq 1$,

$$\bar{a}_n := \sup\{a_k \big| \, k \geq n\}$$

e chiamiamo **limite superiore** *(o 'limsup', o 'massimo limite') di* $\{a_n\}$ *l'elemento di* $\mathbb{R}^*$ *dato da*[1]*:*

$$\limsup a_n := \overline{\lim}\, a_n := \inf\{\bar{a}_n \big| \, n \geq 1\} = \lim_{n\to+\infty} \bar{a}_n \,. \tag{1}$$

Analogamente, si definisce il **limite inferiore** *(o 'liminf', o 'minimo limite') di* $\{a_n\}$ *l'elemento di* $\mathbb{R}^*$ *dato da*

$$\liminf a_n := \underline{\lim}\, a_n := \sup\{\underline{a}_n \big| \, n \geq 1\} = \lim_{n\to+\infty} \underline{a}_n \,, \quad \text{dove} \quad \underline{a}_n := \inf\{a_k \big| \, k \geq n\} \,. \tag{2}$$

Cominciamo col discutere il caso del limite superiore.

Si noti che se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, $\bar{a}_n = +\infty$ per ogni n e quindi $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, mentre se $\{a_n\}$ è limitata superiormente allora $\bar{a}_n \in \mathbb{R}$ per ogni n.

Proposizione 1 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a valori in* $\mathbb{R}$.

(i) *Esiste una sottosuccessione*[2] $\{a_{n_k}\}$ *tale che* $\lim a_{n_k} = \overline{\lim}\, a_n$.

(ii) *Se* $\{a_{n_k}\}$ *è una sottosuccessione regolare*[3] *di* $\{a_n\}$, *allora* $\lim a_{n_k} \leq \overline{\lim}\, a_n$.

Dimostrazione Se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, la tesi segue immediatamente dalla definizione di estremo superiore[4].

Sia ora $\{a_n\}$ limitata superiormente e sia $\ell = \overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Per ogni $n \geq 1$, sia $m_n \geq n$ tale che[5] $a_{m_n} > \bar{a}_n - \frac{1}{n}$. Poiché $m_n \to +\infty$, esiste una sottosuccessione $\{m_{n_k}\}$ di $\{m_n\}$ tale che[6] $m_{n_k} \to +\infty$. Allora la sottosuccessione $\{a_{m_{n_k}}\}$ verifica

$$\bar{a}_{n_k} - \frac{1}{n_k} < a_{m_{n_k}} \leq \bar{a}_{n_k} \,,$$

e quindi, poiché $\lim \bar{a}_{n_k} = \ell$ (per il teorema ponte) si ha anche che $\lim a_{m_{n_k}} = \ell$.

(ii) Segue immediatamente prendendo il limite nella relazione $a_{n_k} \leq \bar{a}_{n_k}$. $\blacksquare$

Naturalmente vale un'affermazione analoga nel caso del limite inferiore (la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio[7]):

Proposizione 2 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione a valori in* $\mathbb{R}$.

(i) *Esiste una sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$ *tale che* $\lim a_{n_k} = \underline{\lim}\, a_n$.

(ii) *Se* $\{a_{n_k}\}$ *è una sottosuccessione regolare di* $\{a_n\}$, *allora* $\lim a_{n_k} \geq \underline{\lim}\, a_n$.

Definizione 2 *Data una successione* $\{a_n\}$, *definiamo* $\mathscr{L}_{\{a_n\}}$ **l'insieme dei possibili limiti** *(per sottosuccessioni) di* $\{a_n\}$, *ossia, il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^*$ *dato da*

$$\mathscr{L}_{\{a_n\}} := \big\{L \in \mathbb{R}^* \big| \, \exists \, \{a_{n_k}\} \text{ per cui } \lim a_{n_k} = L\big\} \,. \tag{3}$$

Dalle Proposizioni 1 e 2 segue che se $\{a_n\}$ è una successione a valori in $\mathbb{R}$, allora:

---

[1] Si osservi che, poiché $\{a_k \big| \, k \geq n+1\} \subseteq \{a_k \big| \, k \geq n\}$, la successione $\bar{a}_n$ è *decrescente*.

[2] Si ricorda che una *sottosuccessione* di $\{a_n\}$ è una 'successione composta' della forma $\{a_{n_k}\}$, dove $\{n_k\}$ è una successione strettamente crescente a valori in $\mathbb{N}$.

[3] Ossia, con limite in $\mathbb{R}^*$.

[4] Possiamo definire ricorsivamente $\{n_k\}$ come segue: $n_1 = 1$ e, dato n_{k-1} (per $k \geq 2$) scegliamo $n_k > n_{k-1}$ tale che $a_{n_k} > k$ (cfr. dal Lemma 6.3 di [C]).

[5] Tale m_n segue dalla definizionme di estremo superiore (cfr. Proposizione 1.93 di [C].

[6] Cfr. nota 4 con $\{m_n\}$ al posto di $\{a_n\}$.

[7] Es. 1.

(i) $\overline{\lim}\, a_n = \max \mathscr{L}_{\{a_n\}}$ e $\underline{\lim}\, a_n = \min \mathscr{L}_{\{a_n\}}$

(ii) $\{a_n\}$ è regolare con limite $L \in \mathbb{R}^*$ $\iff$ $\mathscr{L}_{\{a_n\}} = \{L\}$ $\iff$ $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = L$.

Esercizi

Es 1* Si dimostri la Proposizione 2.

Es 2 Si calcolino il massimo e minimo limite delle seguenti successioni[8]

(i) $1 + (-1)^{[n/3]}$;

(ii) $\dfrac{n+1}{3n-1} + \tanh\big(n \operatorname{sen}(\pi n/4)\big)$;

(iii) $(-1)^{[\frac{2}{3}n]} + (-1)^{[\frac{4}{3}n]}$

(iv) $\operatorname{sen} a_n$ con $a_n := \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} (-1)^{k+1}$

(v) $\operatorname{sen} \dfrac{n^2\pi}{4} \cdot \cos \dfrac{n\pi}{3}$

(vi) $\{\dfrac{n^2}{5}\}$

(vii) $\{\dfrac{n}{4}\} \cdot \{1 - \dfrac{n}{4}\}$

(viii) $n \sin(n\pi/2024)$

Es 3 Si considerino le successioni degli Es 2 e degli esercizi da 96 a 110 di [GE, cap 3]. Per ogni successione $\{a_n\}$ di tali esercizi si calcoli l'insieme dei possibili limiti $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\{a_n\}}$.

Es 4* Sia $\{a_n\}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$ (ossia $\{a_n\}$ è una successione iniettiva la cui immagine è $\mathbb{Q}$). Dimostrare che che $\mathscr{L}_{\{a_n\}} = \mathbb{R}^*$.

Es 5* (**limsup e liminf di funzioni**) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathscr{D}^* A$. Sia $U_n = (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, $U_n = (n, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$ e $U_n = (-\infty, -n)$ se $x_0 = -\infty$. Definiamo poi

$$\bar{a}_n := \sup\{f(x) \big| \, x \in A \cap U_n\}\,, \qquad \underline{a}_n := \inf\{f(x) \big| \, x \in A \cap U_n\}\,,$$
$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f := \inf \bar{a}_n = \lim \bar{a}_n\,, \qquad \underline{\lim_{x\to x_0}}\, f := \sup \underline{a}_n = \lim \underline{a}_n\,,$$
$$\mathscr{L}_f(x_0) := \big\{L \in \mathbb{R}^* \big| \; \exists\, x_n \in A \text{ per cui } \lim x_n = x_0 \text{ e } \lim f(x_n) = L\big\}\,.$$

Dimostrare che:
(i) esistono due successioni in A, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, che tendono a x_0 e tali che $\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f = \lim f(x_n)$ e $\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f = \lim f(y_n)$;
(ii) se $L \in \mathscr{L}_f$ allora $\underline{\lim}\, f \le L \le \overline{\lim}\, f$;
(iii) $\lim_{x\to x_0} f = L$ se e solo se $\mathscr{L}_f = \{L\}$.

Es 6 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathscr{D}^* A$. Siano $M_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lim M_n = +\infty$; siano $r_n > 0$ tali che $\lim r_n = 0$ e si definisca:
$V_n = (x_0 - r_n, x_0 + r_n)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$, $V_n = (M_n, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$ e $V_n = (-\infty, -M_n)$ se $x_0 = -\infty$;
$\bar{a}'_n := \sup\{f(x) \big| \, x \in A \cap V_n\}\,, \qquad \underline{a}'_n := \inf\{f(x) \big| \, x \in A \cap V_n\}$;
Si dimostri che $\lim \bar{a}_n = \lim \bar{a}'_n$ e che $\lim \underline{a}'_n = \lim \underline{a}_n$ (in altri termini, la definizione di limsup e liminf 'non dipende dalla particolare successione di intorni di x_0').

Es 7 Si calcoli:
(i) $\overline{\lim_{x\to 0}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e $\underline{\lim_{x\to 0}} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
(ii) $\overline{\lim_{x\to +\infty}} \{x\}$ e $\underline{\lim_{x\to +\infty}} \{x\}$
(iii) $\mathscr{L}_f(+\infty)$ con $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

[8] Come al solito, $[\cdot]$ è la parte intera di x e $\{x\} = x - [x]$ è la parte frazionaria di x.