Trigonometria analitica

1 Archi di cerchi e loro misura

Sia
$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big|\ x^2+y^2=1\}$$
la circonferenza di raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ *centrata nell'origine* e sia S^1_+ la parte di S^1 nel quadrante positivo $\overline{\mathbb{R}}^2_+ := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| x\ge 0, y\ge 0\}$:

$$S^1_+ := S^1 \cap \overline{\mathbb{R}}^2_+ = \Big\{\big(x, g(x)\big)\Big|\, 0\le x\le 1\Big\}\,, \quad g(x) := \sqrt{1-x^2}\ . \tag{1}$$

Si noti che la funzione g è decrescente su $[0,1]$.
Fissiamo due punti $z=(x,y)$ e $z'=(x',y')$ su S^1_+. Vogliamo definire la lunghezza dell'*arco di circonferenza in* S^1_+ *di estremi* z *e* z', ossia, assumendo (senza perdita di generalità) che $0\le x\le x'\le 1$, dell'insieme definito da

$$S^1_{x,x'} := \Big\{\big(\xi, g(\xi)\big)\in S^1_+\Big|\, x\le\xi\le x'\Big\}\,.$$

Per fare questo definiamo prima la lunghezza (euclidea) dei segmenti e delle poligonali in $\mathbb{R}^2$.
Un *segmento di estremi* $z_1=(x_1,x_1)$ *e* $z_2 := (x_2,y_2)$ è, per definizione la porzione della retta passante per z_1 e z_2 "limitata" da z_1 e z_2, ossia, l'insieme[1]

$$\sigma(z_1,z_2) = \{z(t) = z_1 + t(z_2-z_1)\in\mathbb{R}^2 \big|\, 0\le t\le 1\}\ . \tag{2}$$

Se z_1, z_2,...,z_n sono $n\ge 2$ punti di $\mathbb{R}^2$ tali che, se $i\ne j$, $\sigma(z_i,z_{i+1})\cap\sigma(z_j,z_{j+1})$ contiene al più un punto, *la poligonale di vertici* z_1, z_2, ..., z_n è, per definizione, l'insieme[2]

$$P(z_1,z_2,...,z_n) := \sigma(z_1,z_2)\cup\cdots\cup\sigma(z_{n-1},z_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1}\sigma(z_i,z_{i+1})\,. \tag{3}$$

Definiamo*la lunghezza (euclidea) di un segmento* $\sigma(z_1,z_2)$ come il numero non negativo

$$\ell\big(\sigma(z_1,z_2)\big) := \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y-y_2)^2}\ , \tag{4}$$

e *la lunghezza della poligonale* $P = P(z_1,z_2,...,z_n)$ come il numero non negativo

$$\ell(P) = \ell\big(P(z_1,z_2,...,z_n)\big) = \sum_{i=1}^{n-1}\ell\big(\sigma(z_i,z_{i+1})\big)\ . \tag{5}$$

Dati $0\le x\le x'\le 1$, diremo che *la poligonale* $P=P(z_1,z_2,...,z_n)$ *è inscritta nell'arco di circonferenza* $S^1_{x,x'}$ se $z_i = \big(x_i, g(x_i)\big)$ con $x_1 := x\le x_2\le\cdots\le x_n := x'$ e $y_i = g(x_i)$; denotiamo $\mathscr{P}_{x,x'}$ la famiglia di tutte le poligonali inscritte in $S^1_{x,x'}$ e si noti che tale famiglia è sempre non vuota poiché $\sigma(z_1,z_2) = P(z_1,z_2)\in\mathscr{P}_{x,x'}$.

Definizione 1 *Dati* $0\le x\le x'\le 1$*, la lunghezza* $\ell(S^1_{x,x'})$ *dell'arco* $S^1_{x,x'}$ *è definito come l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte in* $S^1_{x,x'}$*, in formule:*

$$\ell(S^1_{x,x'}) := \sup\{\ell(P)\big|\, P\in\mathscr{P}_{x,x'}\}\ . \tag{6}$$

Poniamo anche $S^1_x := S^1_{x,1}$.

[1] Se $z_i = (x_i,y_i)$, $z_1 + t(z_2-z_1) = (x_1+t(x_2-x_1), y_1+t(y_2-y_1))$; nel caso $z_1=z_2$ il segmento $\sigma(z_1,z_2)$ *degenera* nel punto $\{z_1\}$.

[2] Si noti che, mentre nella definizione di segmento l'ordine degli estremi non conta, la definizione di poligonale *per* $n\ge 3$ *dipende dall'ordine della ennupla* $(z_1,...,z_n)$.

Per verificare la buona posizione di questa definizione si deve avere che[3] $\{\ell(P) \big| P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$ sia un insieme limitato superiormente. Poiché $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$ si ha che, per ogni poligonale $P(z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_j = (x_j, y_j)$, inscritta nell'arco di circonferenza $S^1_{x,x'}$ si ha[4]

$$\begin{aligned} \ell(P) &= \sum_{i=1}^{n-1} \ell\big(\sigma(z_i, z_{i+1})\big) \leq \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1}-x_i| + |y_{i+1}-y_i| = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) + (y_i - y_{i+1}) \\ &= (x_n - x_1) + (y_1 - y_n) = (x'-x) + \big(g(x) - g(x')\big) \leq 2 \ , \qquad \forall \ P \in \mathscr{P}_{x,x'} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

il che mostra che $\{\ell(P) \big| P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$ è limitato e dunque la definizione ben posta.

Osservazione 2 Chiaramente[5]: (i) $\ell(S^1_{x,x'}) = 0$ se e solo se $x = x'$;
(ii) se $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$, $\ell(S^1_{x_1,x_3}) = \ell(S^1_{x_1,x_2}) + \ell(S^1_{x_2,x_3})$.
(iii) $\ell(S^1_{x,x'}) \geq \ell\Big(P\big((x, g(x)), (x', g(x'))\big)\Big) = \min\{\ell(P) \big| P \in \mathscr{P}_{x,x'}\}$.

2 π e l'arcocoseno

Seguendo la tradizione, chiameremo $\pi/2$ la lunghezza di $S^1_+ = S^1_{0,1}$:

Definizione 3 (pi greco) $\pi := 2\ell(S^1_0)$

Definizione 4 *Per* $x \in [0,1]$*, poniamo* $A(x) := \ell(S^1_x)$*; tale funzione è anche chiamata il ramo principale dell'arcocoseno ristretta a* $[0,1]$.

Osservazione 5 Dall'Osservazione 2, segue immediatamente che *la funzione* $x \in [0,1] \mapsto A(x) \in [0, \pi/2]$ *è una funzione strettamente decrescente e tale che* $A(0) = \frac{\pi}{2}$, $A(1) = 0$.

Dimostriamo che $A(x)$ è differenziabile su $[0,1)$:

Lemma 6 *Per ogni* $0 \leq x < 1$, $A'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dimostrazione Fissiamo $x \in [0,1)$ e calcoliamo la derivata destra $D_+ A(x)$. Sia $0 < h < 1-x$. Dall'Osservazione 2 segue che

$$A(x+h) - A(x) = -(A(x) - A(x+h)) = -\ell(S^1_{x,x+h}) \, . \tag{8}$$

Ora, si noti che, se $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, $y_i = g(x_i)$ e $z_i = (x_i, y_i)$, dal Teorema di Lagrange segue

$$\ell(\sigma(z_1, z_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + \Big(\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}\Big)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + g'(\bar{x})^2}$$

per un opportuno $\bar{x} \in (x_1, x_2)$, e dunque

$$(x_2 - x_1) \inf_{(x_1,x_2)} \sqrt{1+g'^2} \leq \ell(\sigma(z_1, z_2) \leq (x_2 - x_1) \sup_{(x_1,x_2)} \sqrt{1+g'^2} \, , \quad \forall \, 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \, . \tag{9}$$

Sia ora $P = P(z_1, ..., z_n) \in \mathscr{P}_{x,x+h}$ una qualunque poligonale inscritta in S^1_+ di estremi x e $x+h$, ossia $z_i = (x_i, y_i) = (x_i, g(x_i))$ con $x_1 = x \leq \cdots \leq x_n = x+h$, e siano $\alpha(h) :=$

[3] Ovviamente tale insieme di numeri non negativi è non vuoto essendo non vuota la famiglia $\mathscr{P}_{x,x'}$.
[4] Si noti che dalla definizione di poligonale inscritta segue che $x_i \leq x_{i+1}$ mentre $y_i = g(x_i) \geq g(x_{i+1}) = y_{i+1}$.
[5] Es 1.

$\inf_{(x,x+h)} \sqrt{1+g'^2}$ e $\beta(h) := \sup_{(x,x+h)} \sqrt{1+g'^2}$. Allora, da (9) segue

$$\begin{aligned} h \cdot \alpha(h) &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, \alpha(h) \le \sum_{i=1}^{n-1} \Big((x_{i+1} - x_i) \inf_{(x_i,x_{i+1})} \sqrt{1+g'^2} \Big) \\ &\overset{(9)}{\le} \sum_{i=1}^{n-1} \ell(\sigma(z_i, z_{i+1})) = \ell(P) \overset{(9)}{\le} \sum_{i=1}^{n-1} \Big((x_{i+1} - x_i) \sup_{(x_i,x_{i+1})} \sqrt{1+g'^2} \Big) \\ &\le \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, \beta(h) = h \cdot \beta(h)\,. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni poligonale $P \in \mathscr{P}_{x,x+h}$, si ha che

$$\alpha(h) \le \frac{\ell(P)}{h} \le \beta(h)\,,$$

e, prendendo l'estremo superiore su tutte le partizioni $P \in \mathscr{P}_{x,x+h}$, otteniamo

$$\alpha(h) \le \frac{\ell(S^1_{x,x+h})}{h} \le \beta(h)\,.$$

Poiché $\lim_{h\to 0+} \alpha(h) = \sqrt{1+g'(x)^2} = \lim_{h\to 0+} \beta(h)$, dal teorema del confronto segue anche che

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\ell(S^1_{x,x+h})}{h} = \sqrt{1+g'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Tale relazione, assieme alla (8), mostra che $D_+ A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.
In modo del tutto analogo si mostra che anche per la derivata sinistra si ha[6] $D_- A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$. ∎

In particolare, A è continua su $[0,1)$ e $\lim_{x\to 1} A'(x) = +\infty$. Ma, in effetti, A è *continua anche in* $x = 1$: dalla definizione di A e da (7) segue che, per ogni $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} |A(x) - A(1)| &= A(x) \le (1-x) + g(x) = (1-x) + \sqrt{(1-x)(1+x)} \\ &< (1-x) + \sqrt{(1-x)} < 2\sqrt{(1-x)}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

da cui segue che $\lim_{x\to 1-} A(x) = 0 = A(1)$, come annunciato[7].

In conclusione abbiamo dimostrato il seguente

Lemma 7 *$A : x \in [0,1] \mapsto t = A(x)$ è una funzione continua su $[0,1]$, strettamente decrescente di classe $C^1([0,1))$ con $A'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$ e con*[8] *$A[(0,1]) = [0,\pi/2]$.*

3 Definizione di coseno e seno

Essendo strettamente decrescente, la funzione $A : x \in [0,1] \mapsto t = A(x) \in [0,\pi/2]$ è invertibile e la sua inversa (strettamente decrescente) prende il nome di coseno di t (ristretto a $[0,\pi/2]$):

Definizione 8 *La funzione inversa di $A : x \in [0,1] \mapsto t = A(x) \in [0,\pi/2]$, ossia la funzione che a $t \in [0,\pi/2]$ associa $x = \cos t := A^{-1}(t)$ ($A(x) = t$), prende il nome di coseno di t ristretta a $[0,\pi/2]$. Definiamo su $[0,\pi/2]$ anche la funzione seno, $t \in [0,\pi/2] \mapsto \operatorname{sen} t$, come $\operatorname{sen} t := \sqrt{1-\cos^2 t}$. Le funzioni seno e coseno prendono anche il nome di funzioni trigonometriche.*

[6] Es 2.
[7] Infatti la (10) mostra che $A(x)$ è *Hölder continua con esponente* $1/2$ *in* $x = 1$.
[8] Per il teorema dei valori intermedi.

Da tale definizione e dal Lemma 7, segue immediatamente:

Lemma 9 (i) *Per ogni $t \in [0, \pi/2]$ si ha*

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1\,, \tag{11}$$

inoltre, $t \in [0, \pi/2] \mapsto \operatorname{sen} t$ è una funzione continua e strettamente crescente e tale che $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$.
(ii) *Le funzioni seno e coseno sono $C^\infty([0, \pi/2])$ e su $[0, \pi/2]$ si ha*

$$D \operatorname{sen} t = \cos t\ , \qquad D \cos t = -\operatorname{sen} t\,. \tag{12}$$

Dimostrazione (i) segue immediatamente dalla Definizione 8 e dal Lemma 7.
(ii) Dalla regola di derivazione della funzione inversa segue che

$$D \cos t = \frac{1}{A'(x)|_{x=\cos t}} = -\sqrt{1 - x^2}|_{x=\cos t} = -\operatorname{sen} t\,, \tag{13}$$

per ogni[9] $t \in (0, \pi/2]$. Inoltre, derivando $\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ ed usando la (13) si ottiene che $D \operatorname{sen} t = \cos t$ per ogni $t \in (0, \pi/2]$. Per verificare la derivabilità in 0, osserviamo che dal teorema di Lagrange segue che

$$(D_+ \cos t)(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = -\operatorname{sen} \bar{h}$$

per un opportuno $0 < \bar{h} < h$, e poiché $\operatorname{sen} t$ è continua in $t = 0$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$ segue che $D_+ \cos t = 0$. Analogamente, si mostra che $(D_+ \operatorname{sen} t)(0) = 1$. Dalle relazioni (12) segue poi che le funzioni seno e coseno sono $C^\infty([0, \pi/2])$. $\blacksquare$

Possiamo, ora, estendere le funzioni trigonometriche prima sull'intervallo $(-\pi, \pi]$ "per parità" e poi a tutto $\mathbb{R}$ "per periodicità", ponendo:

$$\begin{cases} \cos t = -\cos(\pi - t) \\ \operatorname{sen} t := \operatorname{sen}(\pi - t) \end{cases} \quad \text{se} \quad t \in (\pi/2, \pi]\,, \tag{14}$$

$$\begin{cases} \cos t = \cos(-t) \\ \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{se} \quad t \in (-\pi, 0)\,, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \cos t = \cos(t - 2\pi k) \\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t - 2\pi k \end{cases} \quad \text{se } t \in \big[-\pi, \pi\big) + 2\pi k\,, \quad (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{16}$$

Dal Lemma 9 e da tali definizione segue facilmente il seguente

Lemma 10 (i) *Le funzioni $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ sono funzioni, rispettivamente, pari e dispari di $t \in \mathbb{R}$, e sono funzioni periodiche di periodo 2π.*
(ii) *La relazione (11) vale per ogni $t \in \mathbb{R}$.*
(iii) *Le funzioni trigonometriche sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e vale la (12) per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione I punti (i) e (ii) derivano subito dalle definizioni date e dal Lemma 9.
Per dimostrare il punto (iii) dobbiamo far vedere che le funzioni seno e coseno così definite si "raccordano in modo regolare" nei punti multipli di $\pi/2$.
Cominciamo col discutere la continuità del coseno in $t = \pi/2$. Ponendo $t = \frac{\pi}{2} + s$ la prima relazione in (14) diventa $\cos\big(\frac{\pi}{2} + s\big) = \cos\big(\frac{\pi}{2} - s\big)$ con $s \in (0, \pi/2]$ e il punto $t = \pi/2$ corrisponde a $s = 0$. Dunque, per il Lemma 9 si ha

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}+} \cos t = \lim_{s \to 0+} \cos\Big(\frac{\pi}{2} + s\Big) \overset{(14)}{=} \lim_{s \to 0-} \cos\Big(\frac{\pi}{2} - s\Big) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} \cos t = \cos\frac{\pi}{2} = 0\,,$$

[9] Il valore $t = 0$ in questo calcolo va escluso in quanto corrisponde a $x = 1$ dove la funzione $A(x)$ non è derivabile e quindi non si può applicare la regola della derivata della funzione inversa.

e quindi $\cos t$ è una funzione continua in $t = \pi/2$. In maniera del tutto analoga si dimostra che $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{sen} t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{sen} t = 1$.
Per verificare che $\cos t$ è C^1 in un intorno di $t = \pi/2$ basta notare che[10]

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+} (D\cos t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}+} (-\operatorname{sen} t) = -1 = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} (-\operatorname{sen} t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} (D\cos t)\,.$$

La discussione negli altri casi è del tutto analoga[11]. ∎

4 Formule di addizione

Lemma 11 *Per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$\cos(t+s) = \cos t \cos s - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s\,, \tag{17}$$
$$\operatorname{sen}(t+s) = \operatorname{sen} t \cos s + \cos t \operatorname{sen} s\,. \tag{18}$$

Per dimostrare le formule (i) di addizione faremo uso del seguente

Lemma 12 *Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e tale che*

$$u'' + u = 0\ , \qquad \begin{cases} u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

per un qualche $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora u è identicamente uguale a 0.

Dimostrazione (Lemma 12) Sia, $E(t) := \frac{1}{2}\big(u(t)^2 + u'(t)^2\big)$. Da (19) segue che $E' = uu' + u'u'' = u'(u + u'') = 0$ quindi E è identicamente costante su $\mathbb{R}$; poiché $E(t_0) = 0$ si ha che $E(t) = 0$ per ogni t, e questo significa che $u \equiv 0$ cioè la tesi. ∎

Dimostrazione (del Lemma 11) Fissato s, si definisca

$$u(t) := \cos(t+s) - \cos t \cos s + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s\,.$$

Dalle regole di derivazione e dalla (12) segue che

$$u' = -\operatorname{sen}(t+s) + \operatorname{sen} t \cos s + \cos t \operatorname{sen} s$$

e

$$u'' = -\cos(t+s) + \cos t \cos s - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s = -u$$

quindi u soddisfa l'equazione differenziale in (19) ed inoltre $u(0) = 0 = u'(0)$. Dunque, per il Lemma 12 u è identicamente nulla cioè vale la (17). La (18) si ottiene dalla prima derivando ambo i membri rispetto ad t e moltiplicando ambo i membri per -1. ∎

Osservazione 13 (i) Dalle formule di addizione (17), (18) (e dalle relazioni di parità) seguono immediatamente le seguenti *formule di duplicazione*:

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t\,, \qquad \cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\,. \tag{20}$$

(ii) Dal Teorema di Lagrange e dal Lemma 10 seguono i seguenti "limiti notevoli":

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1\,, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2/2} = 1\,. \tag{21}$$

Dimostrazione Dal Teorema di Lagrange segue che per ogni $t \neq 0$ esiste s tra t e 0 tale che

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 0}{t} = (D \operatorname{sen})(s) = \cos s\,,$$

[10] Vedi Es. 3.
[11] Es 4.

e poiché se $|t| < \delta$ anche $|s| < \delta$ e il coseno è continuo in 0 dove vale 1, da tale relazione segue la prima relazione in (21). Per dimostrare la seconda relazione, osserviamo che:

$$2 \cdot \frac{1-\cos t}{t^2} = 2 \cdot \frac{1-\cos^2 t}{t^2\,(1+\cos t)} = \Big(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big)^2 \cdot \frac{2}{1+\cos t} \to 1, \quad \text{se } t \to 0\,. \qquad \blacksquare$$

(iii) Altre funzioni trigonometriche notevoli sono la tangente, la cotangente, la secante, la cosecante definite, rispettivamente come

$$\tan t := \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,, \quad \operatorname{cotan} t := \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\,, \quad \sec t := \frac{1}{\cos t}\,, \quad \csc t := \frac{1}{\operatorname{sen} t}\,. \tag{22}$$

Il dominio di tangente e secante è $\mathbb{R}\backslash\Big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\Big)$, mentre il dominio di cotangente e cosecante è $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$; la tangente e la cotangente sono periodiche di periodo π (si veda anche Es. 5).
Sono anche fondamentali le funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcocoseno[12], arcotangente e arcocotangente); cfr. Es 6.

Esercizi

Es 1 Dimostrare l'Osservazione 2.
[Suggerimento: se $\sigma(x,x')$ è inscritto in S^1_+ e $x \le y \le x'$, allora $\ell(\sigma(x,x')) \le \ell(P(x,y,x'))$.]

Es 2 Si dimostri che, per $0 < x < 1$, $D_{\_}A(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Es 3 Dimostrare che se $f \in C(a,b) \cap C^1\big((a,x_0) \cup (x_0,b)\big)$ con $a < x_0 < b$ e $\lim_{x\to x_0-} f' = \lim_{x\to x_0+} f'$, allora $f \in C^1(a,b)$.
[Suggerimento: usare il teorema di Lagrange (in $[x_0-\varepsilon, x_0]$ e in $[x_0, x_0+\varepsilon]$) per dimostrare che $D_- f(x_0) = D_+ f(x_0)$ e quindi che f è differenziabile in x_0].

Es 4 Completare la dimostrazione del punto (iii) del Lemma 10.

Es 5 Dimostrare analiticamente (ossia senza far uso degli assiomi della geometria euclidea) le identità trigonometriche elencate qui (tralasciare le identità dove appaiono i gradi e i numeri complessi).

Es 6 Determinare tutti gli intervalli massimali dove sono strettamente monotòne le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente e discutere in dettaglio le proprietà delle relative funzioni inverse (ossia, dei vari rami dell'arcoseno dell'arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente[13]) elencate qui e qui.

Es 7 (L'oscillatore armonico) L'equazione del moto di un punto di massa m che si muove senza attrito su una retta $x \in \mathbb{R}$ ed è attratto verso l'origine da una molla di costante elastica $k > 0$ è data da $m\ddot{x} = -kx$ dove $t \to x(t)$ denota la posizione all'istante t del punto materiale e $\dot{x}$ (secondo la notazione di Newton) denota la derivata rispetto al tempo t di $x(t)$ (e $\ddot{x}$ denota la derivata seconda, etc.).
(i) Dimostrare che esiste ed è unica la soluzione del seguente "problema di Cauchy" (o "ai dati iniziali") per l'oscillatore armonico: $m\ddot{x} = -kx$, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$, con x_0 e v_0 numeri reali asegnati.
(ii) Mostrare che tutte le soluzioni dell'oscillatore armonico si possono anche scrivere come $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ dove $\omega = \sqrt{k/m}$ è detta la frequenza dell'oscillatore, $A \ge 0$ è l'ampiezza massima dell'oscillazione e $\alpha \in [0, 2\pi)$ è la fase.

Es 7 (i) Dimostrare che

$$\operatorname{sen} t < t < \tan t\,, \qquad \forall\ 0 < t < \frac{\pi}{2}\,.$$

[**Suggerimento:** si considerino le funzioni $u(t) = t - \operatorname{sen} t$ e $v(t) = \tan t - t$ su $[0, \pi/2]$ e si usi il Teorema di Lagrange]

(ii) Dimostrare che $|\operatorname{sen} t| < |t|$ per ogni $t \neq 0$.

[12] Abbiamo già visto l'importanza del rampo principale dell'arcocoseno tra o e 1 che abbiamo usato per definire le funzioni trigonometriche.

[13] Ad esempio, il seno è strettamente decrescente su $I := \big[\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\big]$ e il relativo ramo dell'arcoseno è definito come l'inversa di $t \in I \mapsto \operatorname{sen} t \in [-1,1]$; tale ramo ha dunque dominio $[-1,1]$ e immagine I.