1 Insiemi compatti

1.1 Insiemi chiusi in spazi metrici

Sia X uno spazio metrico (ovvero un insieme dotato di una metrica $d(\cdot, \cdot)$).

Proposizione 1 *Un sottoinsieme $E \subset X$ è chiuso se e solo se le successioni in E non ammettono limite fuori da E.*

Dimostrazione Per contrapposizione: E non chiuso $\iff$ $E^c := X \backslash E$ non è aperto $\iff$ esiste $x_0 \in E^c$ tale che, per ogni $k > 0$, $B_{\frac{1}{k}}(x_0) \cap E \neq \emptyset$ $\iff$ esiste $\{x_k\} \subset E$ e $x_0 \notin E$ tale che $\lim x_k = x_0$. ∎

Un corollario immediato di tale risultato, nel caso in cui X sia uno spazio metrico completo, è la seguente

Proposizione 2 *Un sottoinsieme $E \subset X$ è chiuso se e solo se le successioni di Cauchy in E hanno limite in E.*

1.2 Insiemi compatti in spazi metrici

Sia X uno spazio topologico (ovvero un insieme dotato di una topologia[1] $\mathcal{A}$); un insieme $E \subset X$ si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto di E si può estrarre un sottoricoprimento finito:

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \ , \quad E_\alpha \text{ aperto} \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_k \in I : \ E \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_{\alpha_i} \ ;$$

qui I è un insieme arbitrario (e quindi non necessariamente numerabile) di indici.

Se X è uno spazio metrico si dimostra[2] che $E \subset X$ è *compatto se e solo se è compatto per successioni ovvero se:*

$$\forall\ \{x^{(k)}\} \subset E \ , \ \exists\ \{k_j\} \text{ e } x_0 \in E : \ \lim_{j \to \infty} x^{(k_j)} = x_0 \ . \tag{1.1}$$

[1] Una **topologia** su di un insieme arbitrario X è, per definizione, una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (detti "insiemi aperti") che goda delle seguenti proprietà: (i) X e $\emptyset$ appartengono a $\mathcal{A}$; (ii) un'unione arbitraria di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$; (iii) un'intersezione finita di elementi di $\mathcal{A}$ è un elemento di $\mathcal{A}$. I complementari degli insiemi aperti si chiamano insiemi chiusi.

[2] Ad esempio nel corso GE3.

1.3 Insiemi compatti in $\mathbf{R}^n$

Proposizione 3 *$E \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato e sia $E_0 := \{x^{(k)}\}$ una successione in E. Se $\#E_0 < \infty$ esiste una sottosuccessione costante di $\{x^{(k)}\}$ e quindi (1.1) vale banalmente. Supponiamo ora $\#E_0 = \infty$. Poiché E è limitato, esiste un cubo chiuso K di lato R tale che $E \subset K$. Dividiamo K in 2^n cubi chiusi K_i di lato $R/2$. Chiaramente, esiste un $i \in \{1, ..., 2^n\}$ tale che $\#E_0 \cap K_i = \infty$. Iterando la costruzione (dividendo cioè K_i in 2^n cubi chiusi di lato $R/4$ etc.) si trova una successione di cubi $K_i = K_1' \supset K_2', \cdots \supset K_j' \cdots$ di lato $R/2^j$ tali che $\#E_0 \cap K_j' = \infty$. In particolare, per ogni j esiste k_j tale che $x^{(k_j)} \in K_j'$. Dunque se $i > j$, $x^{(k_i)}$ e $x^{(k_j)}$ stanno entrambi in K_j' e quindi[3] $|x^{(k_i)} - x^{(k_j)}|_\infty \leq R/2^j$, ovvero, la sottosuccessione $x^{(k_j)}$ è di Cauchy e, poiché E è chiuso $\lim x^{(k_j)} = x_0$ per un $x_0 \in E$. Il che prova che E è compatto.

Dimostriamo l'implicazione inversa per contrapposizione: assumiamo che E non sia chiuso e limitato. Se E non è chiuso (per la Proposizione 1) esiste $\{x^{(k)}\} \subset E$ e $x_0 \in E^c$ tale che $x^{(k)} \to x_0$ e dunque qualunque sottosuccessione di $\{x^{(k)}\}$ ha limite $x_0 \notin E$. Quindi E non è compatto. Se E è non limitato, per ogni $k > 0$ esiste $x^{(k)} \in E$ con $|x^{(k)}|_\infty > k$ e nessuna sottosuccessione di $\{x^{(k)}\}$ può essere di Cauchy. ∎

1.4 Insiemi chiusi e limitati non compatti

In spazi metrici più "grandi" di $\mathbb{R}^n$, in generale, gli insiemi chiusi e limitati non sono compatti. Sia $X := C([0,1], \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ dotato della norma[4]

$$\|u\|_\infty := \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \ .$$

Proposizione 4 *La palla chiusa unitaria di X, $E := \{u \in X : \|u\|_\infty \leq 1\}$, non è compatta.*

Dimostrazione Sia $\{u_n\} \subset E$ la successione definita da

$$u_n(x) = \begin{cases} 2nx \ , & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \ , \\ 2 - 2nx \ , & \text{se } \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \ , \\ 0 \ , & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \ . \end{cases}$$

Poiché, per ogni $m \geq 2n$, si ha che

$$\|u_m - u_n\|_\infty \geq \left|u_m\Big(\frac{1}{2n}\Big) - u_n\Big(\frac{1}{2n}\Big)\right| = 1$$

[3] Se x, y appartengono ad un cubo di lato r allora $|x - y|_\infty \leq r$.

[4] $(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach (ovvero normato e completo).

non è possibile estrarre da $\{u_n\}$ alcuna successione di Cauchy e dunque E non è compatto. ∎

1.5 Immagini di compatti e teorema di Weierstrass

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici.

Proposizione 5 *Sia $K_1 \subset X_1$ un insieme compatto e $f : K_1 \to X_2$ una funzione continua. Allora $K_2 := f(K_1)$ è un insieme compatto.*

Dimostrazione Sia $\{y^{(k)}\} \subset K_2$. Sia $\{x^{(k)}\} \subset K_1$ tale che $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Essendo K_1 compatto esiste $\{k_j\}$ e $x_0 \in K_1$ tali che $d_1(x^{(k_j)}, x_0) \to 0$. Poiché f è continua su K_1, $d_2\Big(f(x^{(k_j)}, f(x_0)\Big) \to 0$ il che mostra che K_2 è compatto. ∎

Lemma 6 *Sia $E \subset \mathbb{R}$ compatto. Allora E ha massimo e minimo: esistono $m, M \in E$ tali che $m \leq x \leq M$ per ogni $x \in E$.*

Dimostrazione Sia M l'estremo superiore di E. Poiché E è limitato $M < \infty$. Dalla definizione di estremo superiore segue che esiste $\{x_k\} \subset E$ tale che $x_k \to M$ e poiché E è chiuso $M \in E$. Per il minimo si ragiona in modo analogo. ∎

Dalla Proposizione 5 e dal Lemma 6 segue immediatamente il seguente teorema di Weierstrass:

Proposizione 7 (Teorema di Weierstrass) *Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subset X$ un insieme compatto. Una funzione continua $f : K \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo in K.*