1 Introduzione all'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^2$

1.1 Definizioni

(i) Si ricorda che un **intervallo** di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$. Un intervallo si dice **non degenere** se ha interno non vuoto. Un **rettangolo** di $\mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano di due intervalli di $\mathbb{R}$. Un rettangolo si dice **non degenere** se ha interno non vuoto (naturalmente rispetto alla topologia standard di $\mathbb{R}^2$).

(ii) $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **elementare** se $E = \bigcup_{I=1}^{N} R_i$ con R_i rettangoli limitati a due a due disgiunti.

(iii) Una collezione finita di intervalli $\{I_i\} := \{I_i : 1 \leq i \leq N\}$ è una **partizione** dell'intervallo I se gli I_i sono a due a due disgiunti e $I = \bigcup_{I=1}^{N} I_i$. Una collezione finita di rettangoli $\{R_{ij} : 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M\}$ è una **partizione** del rettangolo $E := I \times J$ se $R_{ij} = I_i \times J_j$ e se $\{I_i : 1 \leq i \leq N\}$ è una partizione dell'intervallo I e $\{J_j : 1 \leq j \leq M\}$ è una partizione dell'intervallo J. Chiaramente gli R_{ij} sono a due a due disgiunti e la loro unione è uguale a[1] E.

(iv) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere; $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **a scalini** se[2] $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{R_i}$ con $c_i \in \mathbb{R}$ e R_i rettangoli limitati a due a due disgiunti. La classe delle funzioni a scalini su E (rettangolo limitato e non degenere) si denota con $S(E)$.

(v) Se I ed $R = I \times J$ sono, rispettivamente, un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ ed un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^2$, definiamo la **misura** di I ed R come

$$\mathrm{mis}_1(I) = b - a\ , \qquad \mathrm{mis}_2(R) = (b-a)(d-c)\ , \tag{1.1}$$

dove

$$a = \inf I\ , \quad b = \sup I\ , \quad c = \inf J\ , \quad d = \sup J\ .$$

(vi) Se

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{R_i} \in S(E)\ ,$$

[1] In vari testi (incluso il mio) per "partizione del rettangolo E" si intende semplicemente una collezione finita di rettangoli a due a due disgiunti la cui unione è uguale ad E. La definizione data qui di partizione è più restrittiva.

[2] χ_A denota la funzione caratteristica (o indicatrice) di A: $\chi_A(x,y)$ vale uno se $(x,y) \in A$ e zero altrimenti.

con E rettangolo limitato e non degenere, definiamo **l'integrale di Riemann** di f su E come

$$\int_E f := \int_E f(x,y)dxdy := \sum_{i=1}^N c_i \operatorname{mis}_2(R_i) \ . \tag{1.2}$$

Se $A := \bigcup_{i=1}^N R_i \subset E$ è un insieme elementare (con gli R_i a due a due disgiunti) definiamo la **misura di** A come

$$\operatorname{mis}_2(A) := \sum_{i=1}^N \operatorname{mis}_2(R_i) \ = \int_E \sum_{i=1}^N \chi_{R_i} \ . \tag{1.3}$$

(vii) Sia E un rettangolo limitato e non degenere. Una funzione limitata $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ due funzioni a scalini $f_i \in S(E)$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$ e

$$\int_E f_2 - \int_E f_1 \leq \varepsilon \ ; \tag{1.4}$$

la classe di funzioni integrabili secondo Riemann su E si denota $\mathcal{R}(E)$.

Se $f \in \mathcal{R}(E)$, gli insiemi

$$\left\{ \int_E f_1 : f_1 \in S(E) \text{ e } f_1 \leq f \right\} , \qquad \left\{ \int_E f_2 : f_1 \in S(E) \text{ e } f_2 \geq f \right\} \tag{1.5}$$

sono (grazie a (1.4)) contigui e l'elemento di separazione, per definizione, è **l'integrale di Riemann di** f **su** E e si denota con $\int_E f = \int_E f(x,y)dxdy$; in altri termini

$$\int_E f = \sup_{\substack{f_1 \in S(E) \\ f_1 \leq f}} \int_E f_1 = \inf_{\substack{f_2 \in S(E) \\ f_2 \geq f}} \int_E f_2 \ . \tag{1.6}$$

(viii) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere. Un insieme $A \subset E$ si dice **misurabile secondo Peano-Jordan** se $\chi_A \in \mathcal{R}(E)$; in tal caso si pone

$$\operatorname{mis}_2(A) := \int_E \chi_A \ . \tag{1.7}$$

(ix) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere, sia $A \subset E$ un insieme misurabile (secondo Peano-Jordan) e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diremo che f è *integrabile (secondo Riemann) su* A se la funzione

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) \ , & \text{se } x \in A \ , \\ 0 \ , & \text{se } x \notin A \ , \end{cases} \tag{1.8}$$

è integrabile secondo Riemann su E; se f è integrabile su A poniamo

$$\int_A f := \int_E f_A \ . \tag{1.9}$$

Se A è misurabile denotiamo con $\mathcal{R}(A)$ la classe delle funzioni integrabile su A.

1.2 Osservazioni

Da qui in avanti $E := I \times J$ denota un prefissato rettangolo limitato e non degenere in $\mathbb{R}^2$.

(1) Dato un insieme elementare $A \subset E$ non è difficile mostrare che *esiste sempre una partizione* $\{R_{ij}\}$ *di* E *tale che* $A = \bigcup_{(i,j)\in\mathcal{I}} R_{ij}$ *dove* $\mathcal{I}$ *è un sottoinsieme degli indici* $\{(i,j)\}$.

(2) Da (1) segue che, data $f \in S(E)$ *esistono sempre una partizione* $\{R_{ij}\}$ *di* E *e numeri* $c_{ij} \in \mathbb{R}$ *tali che* $f = \sum_{i,j} c_{ij}\chi_{R_{ij}}$.

(3) Date due partizioni di E, $\{R_{ij}\}$ e $\{R'_{kl}\}$, esiste sempre una terza partizione di E, $\{R''_{mn}\}$, tale che per ogni (m,n) esistono (i,j) e (k,l) tali che

$$R''_{mn} \subset R_{ij} \ , \qquad R''_{mn} \subset R'_{kl} \ ; \tag{1.10}$$

esiste un'unica partizione che soddisfi (1.10) e che contenga il minor numero possibile di rettangoli: tale partizione prende il nome di **partizione unione** di $\{R_{ij}\}$ e $\{R'_{kl}\}$.

(4) L'intersezione di due intervalli è un intervallo e, analogamente, l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo (**esercizio**). In generale, l'unione di due rettangoli *non* è un rettangolo. D'altra parte, usando (1)÷(3), non è difficile mostrare che *la classe dei sottoinsiemi elementari di un rettangolo fissato è chiusa sia rispetto alla intersezione che rispetto alla unione.*

(5) Da (1)÷(3) segue anche che *se* $f, g \in S(E)$ *allora esiste una partizione di* E, $\{R_{ij}\}$ *e numeri* c_{ij} *e* d_{ij} *tali che*

$$f = \sum_{i,j} c_{ij}\chi_{R_{ij}} \ , \qquad g = \sum_{i,j} d_{ij}\chi_{R_{ij}} \ . \tag{1.11}$$

(6) Da (5) segue immediatamente che *se* $f, g \in S(E)$ *allora* $fg, f+g \in S(E)$. Infatti se f e g sono come in (1.11) allora

$$fg = \sum_{i,j} c_{ij}d_{ij}\chi_{R_{ij}} \ , \qquad f + g = \sum_{i,j}(c_{ij} + d_{ij})\chi_{R_{ij}} \ . \tag{1.12}$$

In particolare, si ha che

$$\int_E (f+g) = \sum_{i,j}(c_{ij} + d_{ij}) \operatorname{mis}_2 R_{ij} = \int_E f + \int_E g \ . \tag{1.13}$$

(7) Da (6) e dalla definizione di integrale di Riemann segue che *se* $f, g \in \mathcal{R}(E)$ *allora* $fg, f + g \in \mathcal{R}(E)$; *inoltre*

$$\int_E f \geq 0 \qquad \text{se} \quad f \geq 0 \,, \qquad (\text{“positivitá”}) \tag{1.14}$$

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g \,, \qquad (\text{“linearitá”}) \tag{1.15}$$

$$\Big|\int_E f\Big| \leq \int_E |f| \,. \tag{1.16}$$

Come nel caso unidimensionale (1.16) è conseguenza di (1.14) ed (1.15) (poiché $|f| \pm f \geq 0$).

(8) Dalle definizioni date segue che se $A, B \subset E$ sono insiemi disgiunti misurabili (second Peano-Jordan) e se $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ allora $f \in \mathcal{R}(A \cup B)$ e

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f \,, \qquad (\text{“additivitá”}) \,. \tag{1.17}$$

Infatti, sia E un rettangolo limitato non degenere che contenga $A \cup B$. Il fatto che $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ significa che f_A, $f_B \in \mathcal{R}(E)$. Poiché $A \cap B = \emptyset$, si ha che $f_{A\cup B} = f_A + f_B$ e, per (7), $f_A + f_B \in \mathcal{R}(E)$. Dunque f è integrabile su $A \cup B$. Inoltre, per la linearità dell'integrale

$$\int_{A\cup B} f := \int_E f_{A\cup B} = \int_E (f_A + f_B) = \int_E f_A + \int_E f_B =: \int_A f + \int_B f \,. \quad \blacksquare$$

(9) $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_i \in \mathcal{R}(E)$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$ e $\int_E f_2 - f_1 \leq \varepsilon$ (**esercizio**).

1.3 Integrazione di funzioni continue su rettangoli

Proposizione 1 $C(\overline{E}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(E)$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua sul compatto $\overline{E}$, f è uniformemente continua su E e dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)} \,, \qquad \forall\ (x,y), (x'y') \in E : \ |(x,y) - (x',y')|_\infty \leq \delta \,. \tag{1.18}$$

Sia ora $\{R_{ij}\}$ una qualunque partizione di E tale che i lati di ogni rettangolo R_{ij} non ecceda δ. Allora,

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)} \,, \qquad \forall\ (x,y), (x'y') \in R_{ij} \,, \tag{1.19}$$

(poiché, se $(x,y),(x'y')\in R_{ij}$ allora $|(x,y)-(x',y')|_\infty \le \delta$). Sia ora

$$f_1 := \sum_{i,j} \alpha_{ij}\chi_{R_{ij}} \ , \qquad f_2 := \sum_{i,j} \beta_{ij}\chi_{R_{ij}} \tag{1.20}$$

con

$$\alpha_{ij} := \inf_{R_{ij}} f \ , \qquad \beta_{ij} := \sup_{R_{ij}} f \ . \tag{1.21}$$

Chiaramente $f_k \in S(E)$ e, da (1.19) segue che

$$\int_E f_2 - f_1 = \sum_{i,j} (\beta_{ij}-\alpha_{ij})\, \mathrm{mis}_2(R_{ij}) \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)} \ \sum_{i,j} \mathrm{mis}_2(R_{ij}) = \varepsilon \ ,$$

il che dimostra che $f \in \mathcal{R}(E)$. ∎

Osservazione 2 Dalla dimostrazione appena fatta segue immediatamente che dati $f \in \mathcal{R}(\overline{E})$ ed $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta > 0$ come in (1.18), allora *per ogni partizione* $\{R_{ij}\}$ *con rettangoli di lati non più grandi di* δ, *per ogni scelta di punti* $(x_{ij},y_{ij}) \in R_{ij}$ *si ha che*

$$\Big| \int_E f \ - \sum_{ij} f(x_{ij},y_{ij})\, \mathrm{mis}_2(R_{ij}) \Big| \le \varepsilon \ , \tag{1.22}$$

(si noti che $\alpha_{ij} \le f(x_{ij},y_{ij}) \le \beta_{ij}$). La somma in (1.22) prende il nome di **approssimante di Riemann**. In particolare presa una qualunque successione $\delta_k \to 0$ e fissate una sucessione di partizioni $\{R_{ij}^{(k)}\}$ con rettangoli di lati non più grandi di δ_k e scelti arbitrariamente punti $(x_{ij}^{(k)},y_{ij}^{(k)}) \in R_{ij}^{(k)}$, allora

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j} f(x_{ij}^{(k)},y_{ij}^{(k)})\, \mathrm{mis}_2(R_{ij}^{(k)}) \ , \tag{1.23}$$

(chiaramente anche l'insieme degli indici dove variano i,j nella somma in (1.23) dipendono da k).

Proposizione 3 *Sia* $f \in C(\overline{E})$ *(con* $\overline{E} = [a,b]\times[c,d]$*). Allora le funzioni*

$$y \to \int_a^b f(x,y)dx \ , \qquad x \to \int_c^d f(x,y)dy \ , \tag{1.24}$$

sono funzioni continue su, rispettivamente, $[c,d]$ *e* $[a,b]$ *e si ha che*

$$\int_E f = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx \ . \tag{1.25}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è uniformemente continua su $\overline{E}$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon/(b-a)$ per ogni

$$(x,y),\ (x'y') \in \overline{E}: \quad |(x,y)-(x',y')|_\infty \leq \delta \ . \tag{1.26}$$

Se y e y' sono due punti di $[c,d]$ con $|y-y'| < \delta$ allora $|(x,y)-(x,y')|_\infty \leq \delta$ e dunque

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y')dx\Big| &= \Big|\int_a^b \Big(f(x,y)-f(x,y')\Big)dx\Big| \\
&\leq \int_a^b \Big|f(x,y)-f(x,y')\Big|dx \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dy = \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra che $y \to \int_a^b f(x,y)dx$ è continua su $[c,d]$. Scambiando il ruolo della x e della y si ottiene che anche che la funzione $x \to \int_c^d f(x,y)dy$ è continua su $[a,b]$.

Dimostriamo, ora, la prima uguaglianza in (1.25). Sia $\varepsilon > 0$, sia δ tale che valga (1.18) e sia $\{R_{ij}\} := \{I_i \times J_j\}$ una partizione di E formata da rettangoli di lati non più grandi di δ. Come nella dimostrazione della Proposizione 1, vale (1.19). Scegliamo arbitrariamente $x_i \in I_i$ e $y_j \in J_j$. Per (1.18) (ed usando le proprietà discusse nella sezione precedente) si ha che

$$\begin{aligned}
\Big|\int_E f - \sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij})\Big| &= \Big|\sum_{i,j}\int_{R_{ij}} f - \sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij})\Big| \\
&= \Big|\sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \Big(f(x,y)-f(x_i,y_j)\Big)dxdy\Big| \\
&\leq \sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \Big|f(x,y)-f(x_i,y_j)\Big|dxdy \\
&\leq \sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}dxdy \\
&= \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}\sum_{i,j}\mathrm{mis}_2(R_{ij}) \\
&= \varepsilon \ ;
\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij}) - \sum_j \Big(\int_a^b f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_j \Big(\sum_i f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_1(I_i) - \int_a^b f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i}\Big(f(x_i,y_j) - f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i} \Big| f(x_i, y_j) - f(x, y_j) dx \Big| \Big) \operatorname{mis}_1(J_j) \\
&\leq \sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i} \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis}_2(E)} \Big) \operatorname{mis}_1(J_j) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis}_2(E)} \operatorname{mis}_1(I_i) \operatorname{mis}_1(J_j) \\
&= \varepsilon \ ;
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big| \sum_j \Big(\int_a^b f(x, y_j) dx \Big) \operatorname{mis}_1(J_j) &- \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y) dx \Big) dy \Big| \\
&= \Big| \sum_j \int_{J_j} \Big(\int_a^b f(x, y_j) dx - \int_a^b f(x, y) dx \Big) dy \Big| \\
&\leq \sum_j \int_{J_j} \Big(\int_a^b \Big| f(x, y_j) - f(x, y) \Big| dx \Big) dy | \\
&\leq \sum_j \int_{J_j} \Big(\int_a^b \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis}_2(E)} dx \Big) dy | \\
&= \varepsilon \ .
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

Mettendo insieme (1.27), (1.28) e (1.29) otteniamo che

$$
\Big| \int_E f - \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y) dx \Big) dy \Big| \leq 3\varepsilon \ ,
$$

che, per l'arbitrarietà di ε, dimostra la prima uguaglianza in (1.25). Scambiando il ruolo di x con y si ottiene anche che

$$
\int_E f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y) dy \Big) dx \ . \qquad \blacksquare
$$

1.4 Integrazione di funzioni continue su insiemi normali

Proposizione 4 *Siano $\alpha, \beta \in C([a, b], \mathbb{R})$ tali che $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in [a, b]$; sia*

$$
A := \Big\{ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \quad y \in [\alpha(x), \beta(x)] \Big\} \ ; \tag{1.30}
$$

e sia $f \in C(A, \mathbb{R})$. Allora A è misurabile (secondo Peano-Jordan); f è integrabile su A; la funzione

$$
F(x) := x \to \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \ , \tag{1.31}
$$

è continua su $[a, b]$ e

$$
\int_A f = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \Big) dx \ . \tag{1.32}
$$

Osservazione 5 La Proposizione 4 è una generalizzazione della Proposizione 3.
(ii) Un insieme di $\mathbb{R}^2$ della forma (1.30) prende il nome di **insieme normale** rispetto all'asse delle y.
(iii) Naturalmente, nella Proposizione 4, il ruolo della x e della y può essere scambiato (ed in tal caso l'insieme A in (1.30) con x e y scambiate prende il nome di "insieme normale rispetto all'asse delle x").
(iv) In particolare, prendendo $f \equiv 1$ si ottiene (come ci si aspetta)

$$\mathrm{mis}_2(A) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))dx \ . \tag{1.33}$$

Dimostrazione Sia

$$c := \inf_{[a,b]} \alpha \ , \qquad d := \sup_{[a,b]} \beta \ , \qquad E := [a,b] \times [c,d] \ , \qquad M := \max\{\sup_A |f|, 1\} \ .$$

Si noti che $A \subset E$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per l'uniforme continuità di α e β su $[a,b]$ e di f su A, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\alpha(x) - \alpha(x')| \leq \varepsilon \ , \quad |\beta(x) - \beta(x')| \leq \varepsilon \ , \quad \forall \ x, x' \in [a,b] \ , \ |x - x'| \leq \delta \ , \tag{1.34}$$
$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon \ , \quad \forall \ (x,y), (x',y') \in A \ , \ |(x,y) - (x',y')| \leq \delta \ . \tag{1.35}$$

Sia $\{I_i\}$ una partizione di $[a,b]$ in intervalli non più lunghi di δ e non più corti di $\delta/2$ e siano

$$\alpha_i := \sup_{I_i} \alpha \ , \quad \alpha_i' := \inf_{I_i} \alpha \ , \quad \beta_i := \inf_{I_i} \beta \ , \quad \beta_i' := \sup_{I_i} \beta \ . \tag{1.36}$$

Dunque:

$$[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha(x), \beta(x)] \subset [\alpha_i', \beta_i'] \ , \qquad \forall \ i \ , \ \forall \ x \in I_i \ , \tag{1.37}$$

e (per (1.34)):

$$0 \leq \beta_i' - \beta_i \leq \varepsilon \ , \qquad 0 \leq \alpha_i' - \alpha_i \leq \varepsilon \ . \tag{1.38}$$

Si noti che potrebbe accadere che $\alpha_i > \beta_i$ per qualche i: in tal caso $[\alpha_i, \beta_i]$ è un intervallo vuoto e la lunghezza di $[\alpha_i', \beta_i']$ è piccola. Infatti, se denotiamo

$$\mathcal{I}_0 := \{i : \ \alpha_i > \beta_i\} \ , \qquad \mathcal{I}_1 := \{i : \ \alpha_i \leq \beta_i\} \ ,$$

e se $i \in \mathcal{I}_0$, allora, per (1.34) (e per definizione di $\mathcal{I}_0$), si ha che

$$\beta_i' - \alpha_i' \leq \beta_i' - \beta_i + \beta_i - \alpha_i' < \beta_i' - \beta_i + \alpha_i - \alpha_i' \leq 2\varepsilon \ , \qquad \forall \ i \in \mathcal{I}_0 \ . \tag{1.39}$$

Definiamo, ora, i seguenti insiemi:

$$J_i := [\alpha_i, \beta_i] \ , \quad J_i' := [\alpha_i', \beta_i'] \ , \quad R_i := I_i \times J_i \ , \quad R_i' := I_i \times J_i' \ ,$$
$$A_1 := \cup R_i \ , \quad A_2 := \cup R_i' \ .$$

Dimostriamo che A è misurabile. Si noti che A_1 e A_2 sono insiemi elementari e

$$A_1 \subset A \subset A_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \chi_{A_1} \le \chi_A \le \chi_{A_2} \ .$$

Dunque, grazie a (1.34) e (1.39),

$$\begin{aligned} \int_E \chi_{A_2} - \chi_{A_1} &= \mathrm{mis}_2(A_2 \backslash A_1) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_0} \mathrm{mis}_1(I_i)\ (\beta_i' - \alpha_i') + \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \mathrm{mis}_1(I_i)\ \big((\beta_i' - \beta_i) + (\alpha_i - \alpha_i')\big) \\ &\le \sum \mathrm{mis}_1(I_i)\ 2\varepsilon \\ &= c_1 \varepsilon\ , \qquad\qquad c_1 := 2(b-a)\ . \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ovvero A è misurabile (essendo ε piccolo a piacere).
Definiamo

$$f_1 := \begin{cases} f\ , & \text{su } A_1 \\ -M\ , & \text{su } A_2 \backslash A_1 \\ 0\ , & \text{su } E \backslash A_2 \end{cases} \ , \qquad f_2 := \begin{cases} f\ , & \text{su } A_1 \\ M\ , & \text{su } A_2 \backslash A_1 \\ 0\ , & \text{su } E \backslash A_2 \end{cases} \ . \tag{1.41}$$

Dalla Proposizione 3 e dall'osservazione (8) di §1.2 segue che $f_i \in \mathcal{R}(E)$; inoltre

$$f_1 \le f_A \le f_2\ .$$

Ora, (1.40) implica che

$$\begin{aligned} \int_E f_2 - f_1 &\le 2M \int_{A_2 \backslash A_1} 1 \\ &= 2M\, \mathrm{mis}_2(A_2 \backslash A_1) \\ &\le c_2 \varepsilon\ , \qquad\qquad c_2 := 4M(b-a)\ , \end{aligned} \tag{1.42}$$

il che, per l'arbitrarietà di ε (e per l'osservazione (9) di § 1.2), implica che f_A è integrabile su E ovvero che f è integrabile su A. Chiaramente da (1.40) segue anche che

$$\Big| \int_A f - \int_{A_1} f \Big| \le M\, \mathrm{mis}_2(A \backslash A_1) < c_2 \varepsilon\ . \tag{1.43}$$

Dimostriamo ora che la funzione F di (1.31) è continua su $[a,b]$. Siano x, x' due punti di $[a,b]$ tali che $|x - x'| < \delta$ e sia I_* un intervallo non più lungo di δ che contenga x e x'. Denotiamo

$$\alpha_* := \sup_{I_*} \alpha\ , \quad \alpha_*' := \inf_{I_*} \alpha\ , \quad \beta_* := \inf_{I_*} \beta\ , \quad \beta_*' := \sup_{I_*} \beta\ ;$$

analogamente a quanto osservato nel caso degli intervalli I_i, si ha che $\alpha_* - \alpha'_* \leq \varepsilon$, $\beta'_* - \beta_* \leq \varepsilon$ e se $\alpha_* > \beta_*$ allora $\beta'_* - \alpha'_* < 2\varepsilon$. Assumiamo, dapprima, che $\alpha_* > \beta_*$: in tal caso, grazie a (1.39),

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x')| &= \Big|\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy - \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} f(x',y)dy\Big| \\
&\leq \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy + \int_{\alpha(x')}^{\beta(x')} |f(x',y)|dy \\
&\leq M\Big(\beta(x) - \alpha(x) + \beta(x') - \alpha(x')\Big) \\
&\leq 2M(\beta'_* - \alpha'_*) \leq 4M\varepsilon \ . \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

Assumiamo, ora, che $\alpha_* \leq \beta_*$: in tal caso

$$\alpha(x) \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta(x) \ , \qquad \alpha(x') \leq \alpha_* \leq \beta_* \leq \beta(x') \ ,$$

e, per (1.35), si ha che

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x')| &= \Big| \int_{\alpha(x)}^{\alpha_*} f(x,y)dy + \int_{\alpha_*}^{\beta_*} f(x,y)dy + \int_{\beta_*}^{\beta(x)} f(x,y)dy \\
&\quad - \int_{\alpha(x')}^{\alpha_*} f(x',y)dy - \int_{\alpha_*}^{\beta_*} f(x',y)dy - \int_{\beta_*}^{\beta(x')} f(x',y)dy\Big| \\
&\leq \int_{\alpha(x)}^{\alpha_*} |f(x,y)|dy + \int_{\beta_*}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy \\
&\quad + \int_{\alpha(x')}^{\alpha_*} |f(x',y)|dy + \int_{\beta_*}^{\beta(x')} |f(x',y)|dy \\
&\quad + \int_{\alpha_*}^{\beta_*} |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leq 2M\Big(\alpha_* - \alpha'_* + \beta'_* - \beta_*\Big) + \varepsilon(\beta_* - \alpha_*) \\
&\leq c_3\varepsilon \ , \qquad c_3 := 4M + (d-c) \ . \qquad (1.45)
\end{aligned}$$

Da (1.44) e (1.45) segue che

$$|F(x) - F(x')| \leq c_3\varepsilon \ , \qquad (1.46)$$

e, quindi, F è continua su $[a,b]$.

Rimane da dimostrare (1.32).

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{A_1} f - \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_i \int_{I_i} \Big(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x,y)dy - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_i \int_{I_i} \Big(\int_{\alpha(x)}^{\alpha_i} f(x,y)dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \\
&\le \sum_i \int_{I_i} \Big(\int_{\alpha(x)}^{\alpha_i} |f(x,y)|dy + \int_{\beta_i}^{\beta(x)} |f(x,y)|dy\Big)dx \\
&\le 2M\varepsilon \sum_i \mathrm{mis}_1(I_i) = 2M(b-a)\varepsilon \\
&\le c_2\varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme tale relazione e (1.43) si ha che

$$
\Big|\int_A f - \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\Big)dx\Big| \ \le \ 2c_2\varepsilon \ ,
$$

che, per l'arbitrarietà di ε, implica (1.32). ∎