1 L'insieme ternario di Cantor

Dato un intervallo chiuso $[a, b]$ di lunghezza $\delta := b - a > 0$, definiamo la mappa $\mathcal{C}$ come la mappa che all'intervallo $[a, b]$ associa i due intervalli chiusi di lunghezza $\delta/3$ ottenuti rimuovendo da $[a, b]$ l'intervallo aperto di lughezza $\delta/3$ con centro nel punto di mezzo di $[a, b]$:

$$\mathcal{C}([a, b]) = \left[a, a + \frac{1}{3}\delta\right] \cup \left[a + \frac{2}{3}\delta, b\right] \ . \tag{1}$$

Definizione 1 *Sia* $I_1^{(0)} := [0, 1]$ *e sia* $\mathcal{F}_0 := \{I_1^{(0)}\}$. *Per* $k \geq 1$, *definiamo ricorsivamente la famiglia di intervalli* $\mathcal{F}_k := \{I_j^{(k)},\ 1 \leq j \leq 2^k\}$, *di lunghezza* $1/3^k$, *ottenuta da* $\mathcal{F}_{k-1}$ *definendo gli* $I_j^{(k)}$ *tramite la relazione*

$$I_{2j-1}^{(k)} \cup I_{2j}^{(k)} := \mathcal{C}(I_j^{(k-1)}) \ . \tag{2}$$

L'insieme

$$C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \ , \qquad C_k := \bigcup_{j=1}^{2^k} I_j^{(k)} \ , \tag{3}$$

prende il nome di insieme (ternario) di Cantor.

Cominciamo col discutere alcune semplici proprietà di C.

(i) Denotiamo con $a_j^{(k)}$ e $b_j^{(k)}$ gli estremi di $I_j^{(k)}$:

$$I_j^{(k)} =: [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \ . \tag{4}$$

Per costruzione, si ha che

$$\begin{aligned} a_{2j-1}^{(k)} &= a_j^{(k-1)} \ , \quad b_{2j-1}^{(k)} = a_j^{(k-1)} + \frac{1}{3^k} \ , \\ a_{2j}^{(k)} &= a_j^{(k-1)} + \frac{2}{3^k} \ , \quad b_{2j}^{(k)} = b_j^{(k-1)} \ , \end{aligned} \tag{5}$$

per ogni $k \geq 1$ e $j \leq 2^{k-1}$. Si noti anche che, essendo

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^k} \ , \tag{6}$$

l'estremo destro di $I^{(k)}_{2j-1}$ può anche scriversi come

$$b^{(k)}_{2j-1} = a^{(k-1)}_j + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \ . \tag{7}$$

Dalle relazioni (5) segue in particolare che, per ogni j, $a^{(k-1)}_j$ e $b^{(k-1)}_j$ appartengono a C_k per ogni k e dunque:

$$a^{(k)}_j, b^{(k)}_j \in C \ , \qquad \forall\ k \geq 1 \ , \ \forall\ 1 \leq j \leq 2^k \ . \tag{8}$$

(ii) Chiaramente

$$b^{(k)}_j < a^{(k)}_{j+1} \ , \qquad \forall\ 1 \leq j \leq 2^k - 1 \ , \tag{9}$$

il che significa che gli intervalli $I^{(k)}_j$ sono a due a due disgiunti, cosicché

$$\mathrm{mis}\, C_k = \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \ , \qquad \mathrm{mis}\Big([0,1]\backslash C_k\Big) = 1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \ . \tag{10}$$

(iii) Gli C_k formano una famiglia decrescente di insiemi elementari chiusi $C_{k+1} \subsetneqq C_k$.

(iv) C è chiuso (essendo intersezione di insiemi chiusi).

(v) $C \subset C_k$ per ogni k e poiché la misura dei C_k tende a zero quando k tende ad infinito (per (10)), si ha che *l'insieme ternario di Cantor C è un insieme di misura nulla*.

L'insieme di Cantor è strettamente collegato all'espansione ternaria dei numeri reali come mostra la seguente

Proposizione 2 *Per ogni $k \geq 1$,*

$$\{a^{(k)}_j \ : \ 1 \leq j \leq 2^k\} = \Big\{x = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i} \ : \ a_i \in \{0,2\}\Big\} \ , \tag{11}$$

$$\{b^{(k)}_j \ : \ 1 \leq j \leq 2^k\} = \Big\{x = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \ : \ a_i \in \{0,2\}\Big\} \ . \tag{12}$$

Inoltre

$$C = \Big\{x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ : \ a_i \in \{0,2\}\Big\} \ . \tag{13}$$

Dimostrazione Le (11) e (12) derivano immediatamente, per induzione, dalle relazioni in (5) e da (7).

Chiamiamo, ora, C_* l'insieme dei punti in zero con espansione ternaria in cui non compare mai l'uno:

$$C_* := \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} : \ a_i \in \{0, 2\} \right\} . \tag{14}$$

Vogliamo dimostrare che $C = C_*$.

Gli $a_j^{(k)}$ sono punti di C (vedi (8)) e sono tutti i punti che ammettono *espansione ternaria finita in cui non compare l'1*; da questo segue, essendo C chiuso che

$$C_* \subset C \ . \tag{15}$$

Per dimostrare l'inclusione inversa faremo vedere la relazione equivalente

$$C_*^c := [0, 1]\backslash C_* \subset [0, 1]\backslash C =: C^c \ . \tag{16}$$

Sia dunque $x \in [0, 1]\backslash C_*$. Questo significa che x ammette un'espansione ternaria infinita della forma

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \ , \tag{17}$$

con $k \geq 1$ (se $k = 1$ la prima somma è assente), $a_i \in \{0, 2\}$ e i b_i non tutti nulli né tutti uguali a due: infatti se i b_i fossero tutti nulli allora, per (6),

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \in C_* \ ;$$

analogamente se tutti i b_i fossero uguali a 2 si avrebbe (di nuovo per la (6)):

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^k} \in C_* \ .$$

Poiché i b_i non sono tutti nulli né tutti uguali a 2 si ha che (ancora (6))

$$0 < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \frac{1}{3^k} \ . \tag{18}$$

Ora, poiché

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^k} = b_j^{(k-1)}$$

per un qualche j si ha che

$$b_j^{(k-1)} < x < b_j^{(k-1)} + \frac{1}{3^k} = a_{j+1}^{(k-1)} \ ,$$

e, dunque, $x \notin C_k$ da cui segue che $x \notin C$. ∎

Nella prossima proposizione raccogliamo le proprietà più importanti di C.

Osservazione 3 Una maniera equivalente di dire che un punto $x \in [0,1]$ ha un'espansione ternaria senza 1 è dire che esiste $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ed esistono $1 \leq k_j \uparrow$ tali che

$$x = 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{3^{k_j}} \ , \tag{19}$$

(con la convenzione che se $N = 0$ allora $x = 0$).

Proposizione 4 *(i) C è perfetto (ossia chiuso e senza punti isolati).*
(ii) C è totalmente disconnesso (ossia non contiene intevalli aperti).
(iii) La cardinalità di C è la cardinalità del continuo (cioè la cardinalità di $\mathbb{R}$).
(iv) C è di misura nulla.

Dimostrazione (i): ogni punto $x \in C$ ha la forma (19). Se $N < \infty$ in (19) e se poniamo

$$x_n := 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{3^{k_j}} + \frac{2}{3^{k_N + n}} \ ,$$

si ha che $x < x_n \in C$, per ogni $n \geq 1$, e $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e dunque x non è isolato.
Se $N = \infty$ in (19), e se poniamo

$$x_n := 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^{k_j}} \ ,$$

si ha che $x > x_n \in C$ e $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e dunque, anche in questo caso, x non è isolato.
(ii): supponiamo, per assurdo, che $C \supset (a,b)$ con $a < b$. Poichè C è chiuso, $[a,b] \subset C$. Sia $k \geq 1$ tale che $1/3^k < (b-a)$. Poiché $a \in C \subset C_k$, esiste un j tale che $a \in I_j^{(k)}$ per un qualche j e poiché $(b-a) > 1/3^k$, $b \notin I_j^{(k)}$; ma questo implicherebbe che $[a,b] \cap C_k^c \neq \emptyset$, che è in contraddizione con l'ipotesi fatta che $C \supset (a,b)$.
(iii) E' noto che $\#\mathbb{R} = \#\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e da (13) segue immediatamente che $\#C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
(iv): vedi (v) pag. 2. ∎