Proposizione [Osservazione 9.30, (iv)] *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo limitato e non degenere.*
I. *Se $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann allora f e $-f$ appartengono a $\mathcal{F}(E)$ (e i valori degli integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue di f coincidono).*
II. *Se f e $-f$ appartengono a $\mathcal{F}(E)$ allora esiste una funzione $g : E \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann tale che $f = g$ quasi ovunque (e i valori degli integrali secondo Riemann di g e secondo Lebesgue di f coincidono).*

Dimostrazione

I. Se $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, dalla Definizione 9.10 segue che, per ogni intero positivo k, esistono due funzioni $g_k, h_k \in S(E)$ tali che $g_k \leq f \leq h_k$ in E e $\int_E (h_k - g_k) \leq 1/k$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $\{g_k\}$ sia monotona non decrescente e $\{h_k\}$ sia monotona non crescente[1]. Per la Proposizione 9.26, poiché, per ogni k, $\int g_k \leq \int h_1 < \infty$ (essendo $g_k \leq f \leq h_1$), esiste un insieme di misura nulla Q_1 ed una funzione $g \in \mathcal{F}$ tale che $g_k \uparrow g$ in $E \backslash Q_1$ e tale che l'integrale secondo Lebesgue di g è dato da $\lim \int g_k$; ma per come era stata scelta la successione $\{g_k\}$ *tale integrale coincide anche con quello di Riemann*. Per il Lemma 9.29 applicato alla successione non crescente di funzioni a scalini non negative $(h_k - g_k)$ i cui integrali tendono a zero, si ha che esiste un insieme di misura nulla Q_2 tale che $(h_k - g_k) \to 0$ in $E \backslash Q_2$. Se Q denota l'insieme di misura nulla $Q_1 \cup Q_2$, per $x \in E \backslash Q$, i numeri $g(x)$ e $f(x)$ appartengono all'intervallo $[g_k(x), h_k(x)]$ la cui ampiezza tende a 0 per $k \to \infty$. Dunque, mandando k ad infinito, si deduce che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in E \backslash Q$ e quindi che $f = g$ q.o. in E, il che significa che $f \in \mathcal{F}$. D'altra parte, poiché anche $-f$ è integrabile secondo Riemann, ragionando come sopra, si ha anche che $-f \in \mathcal{F}$.

II. Dalle ipotesi segue che esistono due successioni monotone di funzioni a scalini, $\{f_k\}$ e $\{g_k\}$, ed un insieme di misura nulla, Q_1, tali che $f_k \uparrow f$ e $g_k \downarrow f$ su $E \backslash Q_1$ e tali che $\int f_k \uparrow \int f$ e $\int g_k \downarrow \int f$ (per definizione di integrale di Lebesgue di f); quindi $\int (g_k - f_k) \to 0$. Il fatto che $f_k \leq g_k$ su $E \backslash Q_1$ non implica che tale disuguaglianza valga su tutto E ma è possibile modificare le funzioni in modo tale che ciò avvenga. Possiamo, infatti, assumere che le f_k e g_k siano date da

$$f_k = \sum_{i=1}^{N_k} a_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}} \ , \qquad g_k = \sum_{i=1}^{N_k} b_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}}$$

con gli $R_i^{(k)}$ rettangoli limitati in E a due a due disgiunti e, senza perdita di generalità, possiamo anche assumere che esista un j_k tale che $\mathring{R}_i^{(k)} = \emptyset$ per $i \leq j_k$ e $\mathring{R}_i^{(k)} \neq \emptyset$ per

[1] Basta infatti sostituire eventualmente g_k e h_k con le successioni $\tilde{g}_k$ e $\tilde{h}_k$ definite da: $\tilde{g}_1 = g_1$, $\tilde{g}_k = \sup\{g_k, \tilde{g}_{k-1}\}$ e $\tilde{h}_1 = h_1$, $\tilde{h}_k = \inf\{h_k, \tilde{h}_{k-1}\}$.

$i > j_k$. Poniamo $E_k := \cup_{i \leq j_k} R_i^{(k)}$ (tale insieme è un insieme elementare di misura zero) e $\alpha_k = \inf_{E \setminus Q_1} f$ e $\beta_k = \sup_{E \setminus Q_1} f$ e poniamo

$$\tilde{f}_k = \alpha_k \chi_{E_k} + \sum_{i > j_k} a_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}} \ , \qquad \tilde{g}_k = \beta_k \chi_{E_k} + \sum_{i > j_k} b_i^{(k)} \chi_{R_i^{(k)}} \ .$$

Chiaramente $\tilde{f}_k \leq \tilde{g}_k$ su E e $\tilde{f}_k \leq f \leq \tilde{g}_k$ su $E \setminus Q_1$. Definiamo ora $g(x) = \sup_k \tilde{f}_k(x)$ (per ogni $x \in E$); $Q_2 := \bigcup_{k \geq 1} E_k$ e $Q := Q_1 \cup Q_2$; Q è di misura nulla. Da tali definizioni segue che $g = f$ su $E \setminus Q$. Poiché $\tilde{f}_k \leq \tilde{g}_h$ per ogni h e k si ottiene (prendendo il sup su k) che $g \leq f_h$ per ogni h: dunque $\tilde{f}_k(x) \leq g(x) \leq \tilde{g}_k(x)$ per ogni k e per ogni $x \in E$ il che (assieme al fatto che $\int(\tilde{g}_k - \tilde{f}_k) = \int(g_k - f_k) \to 0$) implica che g è Riemann integrabile. ∎