2 La funzione di Cantor

Sia $C \subset [0,1]$ l'insieme ternario di Cantor (vedi § 1). Il complementare di C è l'insieme aperto $A := [0,1]\backslash C$. Descriviamo brevemente la struttura di A . Chiaramente,

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \qquad \text{dove} \qquad A_k := [0,1]\backslash C_k \ . \tag{1}$$

Inoltre A_k è unione disgiunta degli intervalli aperti "subito a destra" degli $I_j^{(k)}$: più precisamente

$$A_k = \bigcup_{j=1}^{2^k-1} J_j^{(k)} \ , \qquad J_j^{(k)} := \left(b_j^{(k)}, a_{j+1}^{(k)}\right) \ . \tag{2}$$

Da tale definizione seguono immediatamente le seguenti relazioni[1]

$$J_{2j}^{(k)} = J_j^{(k-1)} \ , \qquad |J_{2j-1}^{(k)}| = \frac{1}{3^k} \ , \qquad \forall\ k \geq 1 \ , \quad \forall 1 \leq j \leq 2^{k-1} \ . \tag{3}$$

Per cui, se $h > k$,

$$J_i^{(h)} \cap A_k \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad i = 2^{h-k} j \ \text{ ed in tal caso } \ J_i^{(h)} = J_j^{(k)} \ . \tag{4}$$

Proposizione 1 (Funzione di Cantor o"scala del diavolo") *Esiste una unica funzione continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che:*
(i) se $x \in A$

$$f(x) = \frac{j}{2^k} \tag{5}$$

dove $k \geq 1$ e $1 \leq j \leq 2^k - 1$ sono tali che $x \in J_j^{(k)}$ (in particolare f è costante sugli intervalli $J_j^{(k)}$).
Inoltre:
(ii) f è monotona non decrescente;
(iii) $f(C) = [0,1]$.

[1]Se E è un insieme elementare, $|E|$ denota la sua misura (secondo Peano–Jordan).

Osservazione 2 (i) Si noti che può esistere più d'una coppia di j e k per cui $x \in J_j^{(k)}$ ma, grazie alla relazione (4), il rapporto nel membro di destra di (5) non cambia (e dunque la relazione (5) è ben posta).
(ii) La funzione di Cantor è continua e mappa un insieme di misura nulla (cioè l'insieme ternario di Cantor) in un insieme di misura 1.
(iii) Si può dimostrare che la funzione di Cantor è uniformemente Hölderiana[2] su C con esponente $\alpha = (\log 2)/(\log 3)$.

Dimostrazione (della Proposizione 1) Per ogni $k \geq 1$ definiamo la funzione

$$\varphi_k : A_k \to [0,1] \tag{6}$$

come la funzione che vale $j/2^k$ su $J_j^{(k)}$ ed estendiamo tale φ_k ad una funzione continua monotona non decrescente $f_k : [0,1] \to [0,1]$ tramite interpolazione lineare: più precisamente f_k è definita su $I_j^{(k)}$ come la retta di coefficiente angolare $(3/2)^k$ che unisce i punti $\Big(a_j^{(k)}, (j-1)/2^k\Big)$ e $\Big(b_j^{(k)}, j/2^k\Big)$. Si noti che, poiché, f_k è monotona non decrescente e $f_k(0) = 0$ mentre $f_k(1) = 1$ si ha che

$$f_k([0,1]) = f_k(C_k) = [0,1] \; . \tag{7}$$

Da tali definizioni seguono anche immediatamente le seguenti proprietà:

$$f_h\Big(a_j^{(k)}\Big) = f_k\Big(a_j^{(k)}\Big) = \frac{j-1}{2^k} \quad \text{e} \quad f_h\Big(b_j^{(k)}\Big) = f_k\Big(b_j^{(k)}\Big) = \frac{j}{2^k} \qquad \forall\ h \geq k \; ; \tag{8}$$

$$f_h|_{A_k} = f_k \qquad \forall\ h \geq k \; . \tag{9}$$

Facciamo ora vedere che la successione $\{f_k\}$ converge uniformemente su $[0,1]$ e, quindi, che

$$f := \lim_{k\to\infty} f_k \tag{10}$$

è una funzione continua. Cominciamo col dimostrare che

$$\Big| f_{k+1}(x) - f_k(x) \Big| \leq \frac{1}{2^k} \; , \qquad \forall\ k \; , \ \forall\ x \in [0,1]. \tag{11}$$

Infatti, se $x \in C_k$, allora apparterrà ad un qualche $I_j^{(k)}$ e dalle definizioni date (in particolare dalla monotonia e da (8)) segue che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^k} &= \frac{j-1}{2^k} - \frac{j}{2^k} = f_{k+1}\Big(a_j^{(k)}\Big) - f_k\Big(b_j^{(k)}\Big) \\ &\leq f_{k+1}(x) - f_k(x) \\ &\leq f_{k+1}\Big(b_j^{(k)}\Big) - f_k\Big(a_j^{(k)}\Big) = \frac{j}{2^k} - \frac{j-1}{2^k} = \frac{1}{2^k} \; . \end{aligned}$$

[2] Una funzione $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice Hölderiana su A di esponente $0 < \alpha < 1$ se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni x e y in A si ha che $|g(x) - g(y)| \leq M\,|x-y|^\alpha$.

Se, invece, $x \in A_k$ allora (per la (9)) $f_{k+1}(x) = f_k(x)$ e dunque la (11) vale. Quindi, per ogni $h > k$ si ha

$$\begin{aligned} |f_h(x) - f_k(x)| &= \Big|\sum_{j=k}^{h-1} f_{j+1}(x) - f_j(x)\Big| \le \sum_{j=k}^{h-1} \Big|f_{j+1}(x) - f_j(x)\Big| \\ &\le \sum_{j=k}^{h-1} \frac{1}{2^j} \le \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \ , \end{aligned} \tag{12}$$

e questo implica che la successione $\{f_k\}$ converge uniformemente su $[0,1]$ ad una funzione continua f. Inoltre, prendendo il limite per h che tende ad infinito in (12) si ha che

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_k(x)| \le \frac{1}{2^{k-1}} \ , \qquad \forall\ k \ge 1 \ . \tag{13}$$

Se $x \in A$, esiste k tale che $x \in A_k$ e dunque, per la (9), $f_k(y) = f_{k+1}(y) = \cdots = f(y) = j/2^k$, per ogni y nell'intervallo massimale contenente x, il che prova la (i).

Dalla monotonicità delle f_k segue la (ii).

Sia ora $\bar y \in [0,1]$. Vogliamo far vedere che esiste un $\bar x \in C$ tale che $f(\bar x) = \bar y$. Poiché $f([0,1]) = [0,1]$ (f è continua, monotona e $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$) esiste un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = \bar y$. Se $x \in C$ poniamo $\bar x = x$ ed abbiamo finito. Se $x \in C^c = A$, esiste $J_j^{(k)}$ tale che $x \in J_j^{(k)}$ ma allora (poiché f è costante su $J_j^{(k)}$ ed è continua) $\bar y = f(x) = f(b_j^{(k)})$. Ma $b_j^{(k)} \in C$ e dunque possiamo porre $\bar x = b_j^{(k)}$. ∎

Esercizio 1 (i) Determinare la frontiera di C e di A. (ii) Trovare un insieme numerabile denso in C.

Esercizio 2 Dimostrare che f non è iniettiva su C.

Esercizio 3 Dimostrare che f è iniettiva sull'insieme $\widetilde{C} := C \backslash \mathcal{F}$, dove $\mathcal{F} := \Big(\bigcup_{k\ge1} \partial C_k\Big)$.

Esercizio 4 Dimostrare l'affermazione (iii) dell'Osservazione 2.

Esercizio 5 Dimostrare che, per ogni $0 < \alpha < 1$ esiste un insieme di misura nulla $C_\alpha \subset [0,1]$ ed una funzione $f_\alpha \in C([0,1],[0,1])$, Hölderiana di esponente α, tale che $f_\alpha(C_\alpha) = [0,1]$.

Esercizio 6 Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f$.

Esercizio 7 (i) Sia $E_k = [0,1]\backslash\partial C_k$. Si Calcoli $\int_{E_k} f_k'$. (ii) Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $g(x) = c$ se $x \in C$ e $g(x) = 0$ se $x \in C^c$. Dire se g è integrabile secondo Riemann ed in caso affermativo calcolarne l'integrale.

Suggerimenti e/o soluzioni:
Es.1 (i): $\partial C = C$; $\partial A = C$.
Es.2: $f(b_j^{(k)}) = f_k(b_j^{(k)}) = f_k(a_{j+1}^{(k)}) = f(a_{j+1}^{(k)})$.
Es.4: Siano $y < x$ due punti di C. Sia k tale che $\frac{1}{3^k} \leq |x-y| < \frac{1}{3^{k-1}}$. Allora esiste j tale che $x, y \in I_j^{(k-1)}$. Sia $\alpha := \log 2/\log 3$. Si avrà:

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq 3^{\alpha(k-1)}\,|f(x)-f(y)| = 2^{k-1}\,|f(x)-f(y)| \\
&\leq 2^{k-1}\Big(|f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(y)|\Big) \\
&\leq 2^{k-1}\Big(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}}\Big) = 3\ .
\end{aligned}$$

Es. 5: Si vari opportunamente la costruzione dell'insieme ternario di Cantor come segue. Sia $\sigma < 1/2$ ed alla mappa $\mathcal{C}$ di § 1 si sostituisca la mappa $\mathcal{C}_\sigma$ che ad un intervallo $[a,b]$ di lunghezza δ, associa i due sottointervalli $[a, a+\sigma\delta]$ e $[b-\sigma\delta, b]$ (l'insieme ternario di Cantor corrisponde a $\sigma = 1/3$). La funzione di Cantor associata risulterà essere Hölderiana di esponente $\alpha = \log 2/(\log \sigma^{-1})$.
Es. 6: $\int_0^1 f = 1/2$.
Es. 7: (i) $\int_{E_k} f_k' = 1$. (ii) Sì , $\int_0^1 g = 0$.