6 Integrale di Riemann generalizzato e applicazioni alle serie di Fourier

6.1 Estensione dell'integrale di Riemann

Lemma 1 *Siano B_j, $j \geq 1$, insiemi misurabili secondo Peano–Jordan tali che*

$$B_{j+1} \subset B_j \tag{6.1}$$

e tali che $\cap_j B_j$ sia un insieme di misura nulla. Allora

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{mis} B_j = 0 \ . \tag{6.2}$$

Dimostrazione Sia R_0 un rettangolo compatto tale che $\overset{\circ}{R}_0 \supset \overline{B_1}$. Chiamiamo $B := \cap_j B_j$ e fissiamo un numero arbitrario $\varepsilon > 0$. Per ogni $j \geq 1$, sia $\{K_i^{(j)}\}$ un ricoprimento di cubi aperti di ∂B_j tale che

$$\sum_{i\geq 1} \operatorname{mis} K_i^{(j)} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \ ;$$

sia, inoltre, $\{K_i^{(0)}\}$ un ricoprimento di cubi aperti di B tale che

$$\sum_{i\geq 1} \operatorname{mis} K_i^{(0)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Si osservi che

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mis} K_i^{(j)} \leq \varepsilon \ . \tag{6.3}$$

Siano

$$\mathcal{R}_1 := \{K_i^{(j)}\ , j \geq 0,\ i \geq 1\} \ , \qquad A := \bigcup_{j\geq 0, i\geq 1} K_i^{(j)} \ .$$

A è un aperto e $R_0 \backslash A$ un compatto. Sia x un punto arbitrario di $R_0 \backslash A$. Chiaramente $x \notin B$ e dunque esiste $j = j(x)$ tale che $x \notin B_{j(x)}$. Inoltre, poiché $x \notin \partial B_{j(x)}$, esiste un cubo aperto $K(x)$ centrato in x tale che $K(x) \cap B_{j(x)} = \emptyset$. Sia $\mathcal{R}_2 := \{K(x) :\ x \in R_0 \backslash A\}$.

I cubi in $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ formano un ricoprimento aperto di R_0 e, quindi, esiste un numero finito di cubi $K_1, ..., K_N$ in $\mathcal{R}_1$ e cubi $K(x_1), ..., K(x_M)$ in $\mathcal{R}_2$ tali che

$$R_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{M} K(x_i) \ ;$$

e da (6.3) segue che

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{mis} K_i \le \varepsilon \ . \tag{6.4}$$

Sia $j_0 := \max_{1 \le i \le M} j(x_i)$. Allora $B_{j_0} \cap K(x_i) = \emptyset$ per ogni $1 \le i \le M$ e dunque $B_{j_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ e dunque, grazie a (6.4),

$$\operatorname{mis} B_{j_0} \le \operatorname{mis} \bigcup_{i=1}^{N} K_i \le \sum_{i=1}^{N} \operatorname{mis} K_i \le \varepsilon \ .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ∎

Corollario 2 *Siano $A_j \subset A_{j+1}$ insiemi misurabili secondo Peano–Jordan e tali che $A := \cup_j A_j$ sia misurabile secondo Peano–Jordan. Allora*

$$\sup_j \operatorname{mis} A_j = \operatorname{mis} A \ . \tag{6.5}$$

Se, inoltre, $f \in \mathcal{R}(A)$ (è integrabile secondo Riemann su A) allora

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f = \int_A f \ . \tag{6.6}$$

Dimostrazione Sia $B_j := A \backslash A_j$. Gli insiemi B_j verificano le ipotesi del Lemma 1 (infatti, $\cap_{j\ge1} B_j = \emptyset$) e poiché $\operatorname{mis} B_j = \operatorname{mis} A - \operatorname{mis} A_j$, si ha la (6.5). Se f è integrabile secondo Riemann su A allora è, in particolare, limitata: $\sup_A |f| \le M < \infty$. Ed allora:

$$\Big| \int_A f \ - \int_{A_j} f \Big| = \Big| \int_{A\backslash A_j} f \Big| \le \int_{A\backslash A_j} |f| \le M \operatorname{mis}(A\backslash A_j) = M\Big(\operatorname{mis}(A) - \operatorname{mis}(A_j)\Big) \ ,$$

e la (6.6) segue da (6.5). ∎

Un'estensione dell'integrale di Riemann (che si avvicina sostanzialmente all'integrale di Lebesgue) è basata sulla seguente

Proposizione 3 *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Siano, per $k = 1$ e $k = 2$, $\{A_j^{(k)}\}$ due successioni di sottoinsiemi di E misurabili secondo Peano–Jordan, tali che: $A_j^{(k)} \subset A_{j+1}^{(k)}$ e $\bigcup_{j\geq 1} A_j^{(k)} = E$. Assumiamo che f sia Riemann–integrabile su $A_j^{(k)}$ per ogni k e j e*

$$\sup_k \sup_j \int_{A_j^{(k)}} |f(x)|dx < \infty \ . \tag{6.7}$$

Allora esistono i limiti $\lim_{j\to\infty} \int_{A_j^{(k)}} f(x)dx$ e tali limiti coincidono:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A_j^{(1)}} f(x)dx = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j^{(2)}} f(x)dx \ . \tag{6.8}$$

Dimostrazione Assumiamo, dapprima, che $f \geq 0$. Da (6.7) segue che

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A_j^{(k)}} f(x)dx = \sup_j \int_{A_j^{(k)}} f(x)dx =: \alpha_k \ .$$

Sia $\hat{A}_j := A_j^{(1)} \cap A_j^{(2)}$; $\{\hat{A}_j\}$ verifica le stesse ipotesi di $\{A_j^{(k)}\}$. Sia

$$\hat{\alpha} := \sup_j \int_{\hat{A}_j} f(x)dx \ .$$

Chiaramente $\hat{\alpha} \leq \alpha_k$ e se si avesse $\alpha_k \leq \hat{\alpha}$ allora $\alpha_1 = \alpha_2$. Fissiamo k, ad esempio $k = 1$, e dimostriamo che $\alpha_1 \leq \hat{\alpha}$. Sia $\varepsilon > 0$. Sia j_0 tale che

$$\int_{A_{j_0}^{(1)}} f(x)dx \geq \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Sia $A_j := \hat{A}_j \cap A_{j_0}^{(1)}$; $A_j \subset A_{j+1}$ e $\cup_j A_j = A_{j_0}^{(1)}$. Dal Corollario 2 segue che $\sup \operatorname{mis} A_j = \operatorname{mis} A_{j_0}^{(1)}$. Sia $M := \sup_{A_{j_0}^{(1)}} f$ e sia $j_1 \geq j_0$ tale che

$$\operatorname{mis} A_{j_0}^{(1)} \backslash A_{j_1} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \ .$$

Allora

$$\int_{A_{j_0}^{(1)} \backslash A_{j_1}} f \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq \int_{A_{j_0}^{(1)}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \int_{A_{j_1}} f + \int_{A_{j_0}^{(1)} \backslash A_{j_1}} f \\ &\leq \varepsilon + \int_{A_{j_1}} f \leq \varepsilon + \int_{\hat{A}_{j_1}} f \leq \varepsilon + \hat{\alpha} \ . \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\alpha_1 \leq \hat{\alpha}$.
Il caso con f arbitraria segue dalle decomposizioni $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$, dove $f_\pm \geq 0$ denotano le parti positive e negative di f. $\blacksquare$

Grazie a tale proposizione, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 4 *Sia $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\{A_j\}$ una successione di sottoinsiemi di E tale che:*

(R1) *A_j è misurabile secondo Peano–Jordan per ogni j, $A_j \subset A_{j+1}$ e $\bigcup_{j\geq 1} A_j = E$,*

(R2) *$f \in \mathcal{R}(A_j)$ per ogni j,*

(R3) $\sup_j \int_{A_j} |f(x)|dx < \infty$.

Allora esiste il $\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f(x)dx$ e tale numero dipende solo da E e da f. Per definizione porremo

$$\int_E f(x)dx := \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} f(x)dx$$

e tale numero prende il nome di integrale di Riemann generalizzato di f su E. Lo spazio delle funzioni su E per cui vale (R1)÷(R3) *verrà denotato con*[1] $\mathcal{R}_1(E)$. *Se $1 \in \mathcal{R}_1(E)$ porremo*

$$\mathrm{mis}(E) := \int_E 1dx \ ,$$

e chiameremo tale numero la misura di Peano–Jordan generalizzata dell'insieme E.

Esempi (1) Sia $f(x) := 1/|x|^a$ e $E := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$. Allora $f \in \mathcal{R}_1(E)$ se e solo se $a < n$.

(2) Sia $f(x) := 1/|x|^a$ e $E := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$. Allora $f \in \mathcal{R}_1(E)$ se e solo se $a > n$.

(3) Diamo ora un esempio di insieme misurabile secondo Peano-Jordan in senso generalizzato ma non in senso classico. Sia $\{r_j : j \geq 1\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ e $0 < \alpha < 1$. Definiamo

$$I_j := \Big(r_j - \frac{\alpha}{2^{j+1}}, r_j + \frac{\alpha}{2^{j+1}}\Big) \cap (0,1) \ , \qquad A_j := \bigcup_{1\leq i\leq j} I_i \ , \qquad E_a := \bigcup_{j\geq 1} A_j \ .$$

E_α è un sottoinsieme aperto di $(0,1)$ tale che:

[1] **Attenzione:** non confondere il simbolo $\mathcal{R}_1(E)$ con $\mathcal{R}(E)$.

- $\overline{E_\alpha} = [0,1]$;
- gli insiemi A_j sono insiemi elementari, $A_j \subset A_{j+1}$, $E_\alpha = \cup A_j$,

$$\sup_j \operatorname{mis}(A_j) = \sup_j \operatorname{mis} \bigcup_{i=1}^{j} I_j \leq \alpha \sup_j \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2^i} = \alpha \ ,$$

e dunque E_α è misurabile secondo Peano-Jordan in senso generalizzato e $\operatorname{mis} E_\alpha \leq \alpha$;
- E_α non è misurabile secondo Peano–Jordan in senso classico poiché $\partial E_\alpha = [0,1] \backslash E_\alpha$ non è un insieme di misura nulla.

D'altra parte, non è difficile verificare che $C_\alpha := [0,1] \backslash E_\alpha$ non è misurabile in senso generalizzato (**Esercizio**).

Osservazione 5

(i) *Se E è misurabile secondo Peano–Jordan e se $f \in \mathcal{R}(E)$ allora $f \in \mathcal{R}_1(E)$ e i valori dei corrispondenti integrali coincidono; se E è misurabile secondo Peano–Jordan e se $f \in \mathcal{R}_1(E)$ ed è limitata, allora $f \in \mathcal{R}(E)$.*

Dimostrazione La prima affermazione è conseguenza immediata della seconda parte del Corollario 2; la seconda affermazione segue dal teorema di Vitali–Lebesgue. ∎

(ii) $\mathcal{R}_1(E)$ è uno spazio vetoriale e se $f, g \in \mathcal{R}_1(E)$ allora $⨍_E (af + bg) = a ⨍_E f + b ⨍_E g$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Se $f \in \mathcal{R}_1(E)$, chiaramente anche $af \in \mathcal{R}_1(E)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Siano, ora, f_1, f_2 elementi di $\mathcal{R}_1(E)$. Allora esistono $\{A_j^{(i)}\}$ tali che f_i e $\{A_j^{(i)}\}$ soddisfano (R1)÷(R3). Sia $A_j := A_j^{(1)} \cap A_j^{(2)}$: chiaramente f_i soddisfano (R1)÷(R3) rispetto alla stessa famiglia $\{A_j\}$. Da questo segue facilmente la tesi. ∎

(iii) *Se E è limitato ed esiste una successione di insiemi $\{A_j\}$ come in* (R1), *allora E è misurabile in senso generalizzato e*

$$\lim_{j \to \infty} \operatorname{mis}(A_j) = \operatorname{mis}(E) \ .$$

(iv) *Se $f \in \mathcal{R}_1(E)$ e $A \subset E$ è misurabile secondo Peano-Jordan allora $f \in \mathcal{R}_1(A)$ e*

$$⨍_A |f| \leq ⨍_E |f| \ .$$

Ma, in generale $f \notin \mathcal{R}(A)$ (ad esempio $A = E = (0,1)$ e $f = 1/\sqrt{x}$).

Dimostrazione Siano f e $\{A_j\}$ come in (R1)÷(R3) e si prenda $A'_j = A \cap A_j$. ∎

v) *Sia $f \in \mathcal{R}_1(E)$ ed $\varepsilon > 0$. Allora, esiste un insieme misurabile secondo Peano–Jordan $A \subset E$ tale che $f \in \mathcal{R}(A)$, $f \in \mathcal{R}_1(E \backslash A)$ e $\displaystyle\int_{E\backslash A} |f| < \varepsilon$.*

Dimostrazione Siano f e $\{A_j\}$ come in (R1)÷(R3). Fissiamo k e sia $A'_j := A_j \backslash A_k$. Allora $\cup A'_j = E\backslash A_k$ e $\sup \int_{A'_j} |f| \le \sup \int_{A_j} |f| < \infty$. Quindi $f \in \mathcal{R}_1(E\backslash A_k)$. Sia $\alpha := \int_E |f|$ e sia $\alpha_j := \int_{A_j} |f|$. Dalle definizioni segue che $\alpha_j \uparrow \alpha$ e che $\int_{E\backslash A_k} |f| = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j\backslash A_k} |f| = \lim_{j\to\infty} \int_{A_j} |f| - \int_{A_k} |f| = \lim_{j\to\infty} \alpha_j - \alpha_k = \alpha - \alpha_k$. Quindi, esiste k tale che $\alpha - \alpha_k < \varepsilon$ e la tesi si ottiene con $A := A_k$. ∎

(vi) *Se $f \in \mathcal{R}_1(E)$ e $\int_E |f| = 0$, allora esiste $Q \subset E$ di misura nulla tale che $f = 0$ su $E\backslash Q$.*

Dimostrazione Osserviamo, innanzitutto, che dal teorema di Vitali-Lebesgue segue se $g \ge 0$ è Riemann integrabile su A misurabile secondo Peano-Jordan e $\int_A g = 0$ allora esiste $N \subset A$ di misura nulla tale che $g = 0$ su $A\backslash N$ (infatti basta prendere come N i punti della frontiera di A che stanno in A più i punti di discontinuità per g: su $A\backslash N$ g è continua e se fosse $g(x_0) > 0$ per un $x_0 \in A\backslash N$ esisterebbe un intorno di x_0 dove la funzione si manterrebbe più grande di $g(x_0)/2$ e quindi l'integrale di g non potrebbe essere nullo). Ora, siano f e $\{A_j\}$ come in (R1), R(2), (R3). Allora f è Riemann integrabile su A_j e $\int_{A_j} |f| = 0$. Per l'osservazione fatta, esiste $Q_j \subset A_j$ di misura nulla tale che $f = 0$ su $A_j\backslash Q_j$. Sia $Q = \cup Q_j$. Chiaramente $Q \subset E$ è di misura nulla e $f = 0$ su $E\backslash Q$. ∎

(vii) Dal punto precedente segue che $\|\cdot\|_1 := \int_E |\cdot|$ è una seminorma su $\mathcal{R}_1(E)$.

(viii) *Sia $f \in \mathcal{R}_1(E)$ e $\varepsilon > 0$. Allora esiste una funzione C_0^∞ con supporto contenuto nell'interno di E tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.*

Dimostrazione Dal punto (v) qui sopra segue che esiste $A \subset E$ misurabile secondo Peano-Jordan, su cui f è Riemann integrabile e tale che $\int_{E\backslash A} |f| < \varepsilon/2$. Poiché A è misurabile secondo Peano-Jordan (e f è Riemann integrabile su A e quindi ivi limitata) esiste un insieme elementare A_0 tale che $\overline{A_0} \subset \overset{\circ}{A}$ e $\int_{A\backslash A_0} |f| \le M \,\mathrm{mis}(A\backslash A_0) < \varepsilon/4$, dove $M := \sup_A |f|$. Poiché f è Riemann integrabile su A_0 esiste una funzione a scalini $h \in S(A_0)$ tale che $\int_{A_0} |f - h| < \varepsilon/8$. Per definizione, h ha la forma $h = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{R_j}$ con $\{R_j\}$ partizione di A_0. Sia $c = \max |c_j|$ e siano R'_j dei rettangoli tali che $\overline{R'_j} \subset \overset{\circ}{R_j}$ e $\mathrm{mis}(R_j\backslash R'_j) < \varepsilon/(8cN)$. Siano ψ_j delle funzioni C_0^∞ tali che $0 \le \psi_j \le 1$, $\mathrm{supp}\,(\psi_j) \subset R_j$ e $\psi_j = 1$ su R'_j e sia, infine,

$g := \sum_{j=1}^N c_j\psi_j$. Chiaramente $g \in C_0^\infty$ ed il suo supporto è contenuto in A_0 la cui chiusura è contenuta in $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{E}$. Inoltre

$$\int_{A_0} |h-g| = \sum_{j=1}^N \int_{R_j} |h-g| = \sum_{j=1}^N \int_{R_j} |c_j|\ |1-\psi_j| \le \sum_{j=1}^N |c_j| \,\mathrm{mis}(R_j \backslash R_j') < \sum_{j=1}^N |c_j| \frac{\varepsilon}{8cN} \le \frac{\varepsilon}{8}\ .$$

In conclusione:

$$\int_E |f-g| = \int_{E\backslash A} |f| + \int_{A\backslash A_0} |f| + \int_{A_0} |f-g| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \int_{A_0} |f-h| + \int_{A_0} |h-g| \le \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Consideriamo ora altri spazi funzionali in cui è una potenza del modulo della funzione ad essere integrabile in senso generalizzato.

Definizione 6 *Lo spazio della funzioni per cui valgono le ipotesi* (R1), (R2) *e*

$$(\mathrm{R3})_\mathrm{p} \qquad \sup_j \int_{A_j} |f(x)|^p dx =: \int_E |f(x)|^p dx < \infty\ ,$$

per qualche $p \ge 1$ viene denotata con $\mathcal{R}_p(E)$; se p è intero si definirà in modo naturale anche $\int_E f(x)^p dx$.

Per $f \in \mathcal{R}_p(E)$ $(p \ge 1)$ definiamo

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\ .$$

Le disuguaglianze di Hölder[2] *e Minkowski*[3] *si estendono agli integrali di Riemann generalizzati* cioè: $\forall$ p e $q \in (1,\infty)$ tali che $1/p + 1/q = 1$ si ha

$$f \in \mathcal{R}_p(E)\ , g \in \mathcal{R}_q(E) \qquad \Longrightarrow \quad fg \in \mathcal{R}_1(E) \quad \text{e} \quad \|fg\|_1 \le \|f\|_p\ \|g\|_q\ ; \qquad \text{(H)}$$

$$f, g \in \mathcal{R}_p(E) \qquad \Longrightarrow \qquad f+g \in \mathcal{R}_p(E) \quad \text{e} \quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\ . \qquad \text{(M)}$$

Da queste disuguaglianze segue che $\mathcal{R}_p(E)$ è, per $p \ge 1$, uno spazio vettoriale.

In generale non c'è una relazione d'ordine tra i vari $\mathcal{R}_p$, come mostra il seguente esempio. Sia $E = \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ e siano

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } 0 < x < 1\ , \\ 1/x^2 & \text{se } |x| \ge 1\ , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \le 1\ , \\ 1/x & \text{se } x \ge 1\ . \end{cases}$$

[2]Otto Ludwig Hölder, 1859 (Stoccarda) - 1937 (Lipzia).
[3]Hermann Minkowski, 1864 (Alexotas, Russia, ora Kaunas, Lituania) - 1909 (Göttingen, Germania).

Allora, $f \in \mathcal{R}_1(E)$ ma $f \notin \mathcal{R}_2(E)$ mentre $g \in \mathcal{R}_2(E)$ ma $g \notin \mathcal{R}_1(E)$.

Invece se E è un insieme limitato (misurabile secondo Peano-Jordan in senso generalizzato) e $1 \le s < t$ allora

$$\mathcal{R}_t(E) \subset \mathcal{R}_s(E) \qquad \text{e} \qquad F \in \mathcal{R}_t(E) \quad \Longrightarrow \quad \|F\|_s \le \text{mis}(E)^{\frac{t-s}{st}} \; \|F\|_t \ . \tag{6.9}$$

È facile far vedere che in effetti, nelle ipotesi fatte, $\mathcal{R}_t(E)$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}_s(E)$: ad esempio, $1/\sqrt{x} \in \mathcal{R}_1((0,1))$ ma $1/\sqrt{x} \notin \mathcal{R}_2((0,1))$. D'altra parte se E è non limitato non vi è, in generale, relazione d'ordine tra gli spazi $\mathcal{R}_s(E)$ come mostra l'esempio (3).

Dimostrazione (della (6.9)) Sia $F \in \mathcal{R}_t(E)$ vogliamo far vedere che $F \in \mathcal{R}_s(E)$. Siano $p := t/s$ e $q = t/(t-s)$: tali numeri sono più grandi di 1 e $(1/p) + (1/q) = 1$. Applicando la disuguaglianza di Hölder (H) alle funzioni $f := |F|^s$ e $g = 1$ si ottiene

$$\int_E f \cdot g := \int_E |F|^s \le \|f\|_p \; \|g\|_q = \|F\|_t^s \; \text{mis}(E)^{(t-s)/t} \ ,$$

da cui segue che $\|F\|_s \le \|F\|_t \, \text{mis}(E)^{(s-t)/(st)}$. ∎

Esercizio 1 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un rettangolo limitato e non degenere. Si dimostri che per ogni $f \in \mathcal{R}(E)$, per ogni $p \ge 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione a scalini $h \in S(E)$ tale che

$$\int_E |f-h|^p \le \varepsilon \ .$$

Soluzione: sia $M := \max\{1\,,\, \sup_E |f|^p\}$, sia $\{R_j\}$ una partizione di E tale che $\sum_{j=1}^N \text{osc}\,(f;R_j)\,\text{mis}(R_j) < \varepsilon/(2M)$ e sia $J := \{j \,:\, \text{osc}\,(f;R_j) \le 1\}$. Si può allora prendere $h = \sum_{j\in J} (\inf_{R_j} f)\ \chi_{R_j}$. [Si osservi che $\sum_{j\notin J} \text{mis}(R_j) \le \varepsilon/(2M)$].

Esercizio 2 Usare l'esercizio precedente per estendere il punto (viii) al caso $p > 1$.

6.2 Alcuni risultati sulle serie di Fourier

I coefficienti di Fourier $\hat{f}_n := \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx/(2\pi)$ risultano essere definiti per una qualunque funzione $f \in \mathcal{R}_1([0,2\pi])$ e chiaramente $|\hat{f}_n| \le \|f\|_1$.

Proposizione 7 (Lemma di Riemann–Lebesgue) *Se* $f \in \mathcal{R}_1([0,2\pi])$, $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}_n = 0$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$ e sia $g \in C_0^\infty((0, 2\pi))$ tale che $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$. Poiché g è regolare i suoi coefficienti di Fourier decadono rapidamente e, dunque, esiste un N tale che $|\hat{g}_n| \leq \varepsilon/2$ per ogni $|n| \geq N$. Allora,

$$|\hat{f}_n| \;=\; |\widehat{(f-g)}_n| + |\hat{g}_n| \leq \|f - g\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

L'enunciato e la dimostrazione della disuguaglianza di Bessel – vista per funzioni integrabili secondo Riemann – si estendono immediatamente al caso di funzioni[4] $\mathcal{R}_2([0, 2\pi])$. In particolare, *per ogni* $f \in \mathcal{R}_2([0, 2\pi])$ *e per ogni* $N > 0$ *si ha che*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx}|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx - \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}_n|^2 \;, \tag{6.10}$$

da cui segue immediatamente la *disuguaglianza di Bessel per funzioni* $f \in \mathcal{R}_2([0, 2\pi])$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx \;. \tag{6.11}$$

Proposizione 8 (Identità di Parseval per funzioni $\mathcal{R}_2$) *Sia* $f \in \mathcal{R}_2([0, 2\pi])$ *allora*[5]

$$\|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \;, \tag{6.12}$$

ed inoltre

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}_n e^{inx}\|_2 = 0 \;. \tag{6.13}$$

Dimostrazione La (6.12) segue da (6.13) grazie alla (6.10). Dimostriamo, dunque, la (6.13). Osserviamo dapprima che la (6.12) vale per f polinomi trigonometrici (come segue immediatamente da un calcolo diretto).
Denotiamo con $S_N(h)$ il troncamento di ordine N della serie di Fourier di una funzione h. Sia $f \in \mathcal{R}_2([0, 2\pi])$, sia $\varepsilon > 0$, sia $g \in C_0^\infty((0, 2\pi))$ tale che $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon/3$ e sia N tale che $\sup |g - S_N(g)| \leq \varepsilon/3$. Allora,

$$\begin{aligned}
\|f - S_N(f)\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - S_N(g)\|_2 + \|S_N(g) - S_N(f)\|_2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\sum_{|n|\leq N} |\hat{f}_n - \hat{g}_n|^2} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - g\|_2 \leq \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[4] Si ricordi che $\mathcal{R}_2([0, 2\pi]) \subset \mathcal{R}_1([0, 2\pi])$.

[5] Si noti che nella definizione di norma 2 data qui c'è il fattore di normalilzzazione $1/(2\pi)$.