1 Volume di parallelepipedi e determinanti

Dimostriamo la seguente relazione fondamentale tra volumi e determinanti.

Lemma 1 *Sia T una matrice reale $(n \times n)$ e sia $K_1 := [0,1]^n$. Allora*

$$\mathrm{mis}(TK_1) = |\det T| \tag{1}$$

*dove "*mis*" denota la misura di Peano–Jordan in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione Se $n = 1$ la (1) è banalmente vera[1]. Assumiamo, quindi, $n \geq 2$.

Si ricordi che il determinante, visto come funzione delle colonne, è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà: 1) scambiando di posto a due colonne, il valore del determinante cambia segno, 2) il determinante è una funzione lineare della prima colonna[2], 3) il determinante di $(e^{(1)}, ..., e^{(n)})$, dove $\{e^{(i)}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^n$, vale 1. Tale caratterizzazione significa che se Δ è una funzione a valori reali e definita su n–nuple di vettori in $\mathbb{R}^n$ che verifica

$$\begin{aligned}
&1) \quad \Delta(..., v^{(i)}, ..., v^{(j)}, ...) = -\Delta(..., v^{(j)}, ..., v^{(i)}, ...) \ , \quad i \neq j \ , \\
&2) \quad \Delta(av^{(1)} + bw^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \\
&\qquad\qquad = a\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + b\Delta(w^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \\
&3) \quad \Delta(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = 1 \ ,
\end{aligned} \tag{2}$$

(dove la scrittura simbolica nel punto 1) sta a significare che scambiando la i–esima colonna con la j–esima il valore di Δ cambia segno) allora Δ coincide con il determinante, cioè

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma v^{(1)}_{\sigma_1} \cdots v^{(n)}_{\sigma_n} \ ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le permutazioni σ dell'insieme $\{1, ..., n\}$ e ε_σ denota il[3] "segno di σ".

Nel corso della dimostrazione useremo le seguenti notazioni. Se $v^{(1)}$,..., $v^{(n)}$ sono n vettori in $\mathbb{R}^n$ denotiamo con $T := [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ la matrice che ha come j–esima colonna le n componenti, $v_i^{(j)}$, di $v^{(j)}$ cosicché

$$T_{ij} = v_i^{(j)} \ , \qquad Tx = \sum_{j=1}^n x_j v^{(j)} \quad \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}^n\Big) \ , \qquad Te^{(j)} = v^{(j)} \ ; \tag{3}$$

[1] In tal caso $T = \alpha \in \mathbb{R}$ è un numero e $T[0,1] = [0, \alpha]$ se $\alpha \geq 0$ e $[\alpha, 0]$ se $\alpha < 0$.

[2] E dunque, per 1), il determinante è una funzione lineare della j–esima colonna, con j qualunque.

[3] Una permutazione σ di $\{1, ..., n\}$ è una mappa uno–uno $\sigma : j \in \{1, ..., n\} \to \sigma_j \in \{1, ..., n\}$ e ε_σ è il segno di σ (cioè $(-1)^p$ dove p è il numero di scambi che bisogna fare per ordinare la n–nupla $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ o, più analiticamente, $\varepsilon_\sigma = \prod_{i<j} \mathrm{segno}(\sigma_j - \sigma_i)$).

chiameremo, poi, $\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})$ il "parallelepipedo di spigoli $v^{(1)},...,v^{(n)}$" (o anche "parallelepipedo generato da $v^{(1)},...,v^{(n)}$") l'insieme

$$\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}) := \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = \sum_{j=1}^{n} x_j v^{(j)} \ \text{ con } \ 0 \le x_j \le 1 \ ,\forall 1 \le j \le n\} \ . \tag{4}$$

Si noti che

$$\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}) = TK_1 \ , \qquad \Big(T := [v^{(1)},...,v^{(n)}] \ , K_1 := [0,1]^n\Big) \ . \tag{5}$$

Identificando una n-pla di vettori[4] $(v^{(1)},...,v^{(n)})$ con la matrice $T := [v^{(1)},...,v^{(n)}]$, definiamo

$$\Delta_0(v^{(1)},...,v^{(n)}) := \text{mis}(TK_1) = \text{mis}\Big(\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)}\Big) \ , \tag{6}$$

e[5]

$$\Delta(T) := \ \text{segno}\,(\det T) \ \Delta_0(T) \ . \tag{7}$$

Si noti che se $\det T = 0$, $\Pi(T)$ è contenuto in uno spazio vettoriale di dimensione $m < n$ e dunque , in tal caso, $\text{mis}(\Pi(T)) = 0$ e $\Delta(T) = 0$. Per dimostrare (1) basterà dimostrare che la funzione Δ verifica 1), 2), 3) di (2) cosicché si avrà $\Delta(T) = \det T$ e prendendo il modulo di tale relazione si otterrà (1). Dalla definizione di $\Pi(v^{(1)},...,v^{(n)})$ segue immediatamente che

$$\Pi(...,v^{(i)},...,v^{(j)},...) = \Pi(...,v^{(j)},...,v^{(i)},...) \tag{8}$$

e da (5) e da (7) segue immediatamente che, scambiando due vettori di posto, Δ cambia segno: la proprietà 1) è verificata. E' anche chiaro che

$$\Pi(e^{(1)},...,e^{(n)}) = K_1 \tag{9}$$

e dunque $\Delta(e^{(1)},...,e^{(n)}) = 1$ e cioè vale la proprietà 3). Più delicata è la verifica della linearità. Cominciamo col dimostrare che

$$\Delta(av^{(1)},...,v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)},...,v^{(n)}) \ , \tag{10}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Innanzitutto, se $\det[v^{(1)},...,v^{(n)}] = 0$ allora anche $\det[av^{(1)},...,v^{(n)}] = 0$ e al (10) segue dall'osservazione fatta dopo la (7). Assumiamo quindi che $\det[v^{(1)},...,v^{(n)}] \neq 0$ ed osserviamo che se p è un intero positivo, si ha che

$$[0,p] = \{x_1 p : 0 \le x_1 \le 1\} = \bigcup_{i=1}^{p} \Big((i-1) + [0,1]\Big)$$

[4] Si ricordi che $n \ge 2$.

[5] Useremo qui la convenzione che $\text{segno}\,(0) = 0$.

e, dunque,

$$\begin{aligned}
\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &:= \{x_1 pv^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{p} \{(i-1+x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \ 0 \le x_j \le 1\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{p} \Big((i-1)v^{(1)} + \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)})\Big) \ . \qquad (11)
\end{aligned}$$

L'insieme nell'ultima riga di (11) è formato dall'unione di p insiemi di eguale misura (essendo la misura invariante per traslazioni) aventi in comune solo insiemi di misura nulla ("facce" dei parallelepipedi): infatti, se $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$ e se

$$\Big(kv^{(1)} + \Pi(T)\Big) \cap \Big(jv^{(1)} + \Pi(T)\Big) \ne \emptyset \qquad (12)$$

con $j \ne k$, esistono $x, y \in K_1$ tali che $kv^{(1)} + Tx = jv^{(k)} + Ty$, cioè,

$$\Big((j-k) + T(y_1 - x_1) + \sum_{i=2}^{n} (y_i - x_i) v^{(i)} = 0 \ .$$

Dall'indipendenza dei vettori $v^{(i)}$ segue che $x_i = y_i$ per ogni $i \ge 2$ e che $1 \le |j-k| = |x_1 - y_1$ il che implica $|j-k| = 1$ e o $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$ o $y_1 = 0$ e $x_1 = 1$, cioè $kv^{(1)} + Tx$ e $jv^{(k)} + Ty$ appartengono alla faccia comune dei parallelepipede traslati in (12). Quindi, da (11) segue che la misura di $\Pi(pv^{(1)}, v^{(2)}, ...)$ è p volte la misura di $\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ...)$; cioè

$$\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (13)$$

vale con $a = p$ intero positivo. Ora se $\det T > 0$ da (13) segue la (10) e se $\det T < 0$, per (13) si ha che

$$\begin{aligned}
\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= -\Delta_0(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\
&= -a\Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \\
&= a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \qquad (14)
\end{aligned}$$

il che dimostra la (10) con $a = p \in \mathbb{N}_+$ per ogni T. Ora,

$$\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(p\ \frac{1}{p} v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = p\Delta(\frac{1}{p} v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (15)$$

e quindi (dividendo la (15) per p, si vede che) (10) vale anche per $a = \frac{1}{p}$ con p intero positivo. Combinando questi due fatti si ottiene subito che (10) vale per a numero razionale positivo. Dopodiché osservando che, se $0 < \alpha < \beta$

$$\Pi(\alpha v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \subset \Pi(\beta v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \qquad (16)$$

si ottiene facilmente (13) per $a \in (0, \infty)$: basta infatti considerare due successioni monotone di numeri razionali positivi, $a_i < a < a'_i$ che tendano, rispettivamente da sinistra e da destra al numero reale a, ed usare (10) per razionali positivi che insieme alla relazione (16) implica

$$a_i \Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \leq \Delta_0(av^{(1)}, .., v^{(n)}) \leq a'_i \Delta_0(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$$

e prendendo il limite per $i \to \infty$ si ottiene (13) con a numero reale positivo. Da (13) segue la (10) quando $\det T > 0$ e, nel caso $\det T < 0$, la (10) per $a > 0$ segue da (14). Per $a = 0$, (10) deriva immediatamente dalla definizione, essendo $\det[0, v^{(2)}, .., v^{(n)}] = 0$. Infine si noti che

$$\begin{aligned} v^{(1)} + \Pi(-v^{(1)}, ..., v^{(n)}) &= \{(1 - x_1)v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} x_j v^{(j)} : \; 0 \leq x_j \leq 1\} \\ &= \Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \end{aligned} \tag{17}$$

e dunque, essendo il segno di $\det(-v^{(1)}, ..., v^{(n)})$ opposto a quello di $\det(v^{(1)}, ..., v^{(n)})$, si ottiene (10) con $a = -1$. Infine se a è un numero reale negativo, $a = -|a|$, si ottiene

$$\Delta(av^{(1)}, ..., v^{(n)}) = -\Delta(|a|v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ ,$$

quindi (10) è vera per ogni $a \in \mathbb{R}$. Usando la già dimostrata proprietà 1) si ottiene immediatamente che

$$\Delta(v^{(1)}, ..., av^{(j)}, ..., v^{(n)}) = a\Delta(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{18}$$

per qualunque $1 \leq j \leq n$. Resta ora da dimostrare

$$\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{19}$$

Cominciamo col discutere un caso particolare di (19) e cioè $v = v^{(1)}$, $w = v^{(2)}$ (in qual caso il secondo addendo a destra di (19) è nullo per definizione di Δ):

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ . \tag{20}$$

Se $\det T = \det[v^{(1)}, ..., v^{(n)}] = 0$, la (20) è chiaramente vera. Assumiamo che $\det T > 0$ e introduciamo i seguenti "prismi"

$$D_1 := \{x \in K_1 : x_2 \leq x_1\} \ , \quad D_2 := \{x \in K_1 : x_2 \geq x_1\} \ , \quad D_3 := e^{(2)} + D_1 \tag{21}$$

e si noti che $\mathrm{mis}(D_1 \cap D_2) = 0$, $\mathrm{mis}(D_2 \cap D_3) = 0$; che $\Pi(e^{(1)}, ..., e^{(n)}) = K_1$ e che

$$\begin{aligned}
\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) &= \{x_1 e^{(1)} + (x_1 + x_2) e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_i \le 1\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 + x_1 \ , ...\} \\
&= \{x_1 e^{(1)} + y e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ x_1 \le y \le 1 \ , ...\} \cup \\
&\quad\ \{x_1 e^{(1)} + (1+y) e^{(2)} + \cdots \ , \ 0 \le x_1 \le 1 \ , \ 0 \le y \le x_1 \ , ...\} \\
&= D_2 \cup \Big(e^{(2)} + D_1\Big) =: D_2 \cup D_3
\end{aligned} \tag{22}$$

Si ricordi anche che, se $T = [v^{(1)}, ..., v^{(n)}]$, $Te^{(i)} = v^{(i)}$ e che, per ogni $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $AT = [Av^{(1)}, ..., Av^{(n)}]$ e $A\Pi(T) = \Pi(AT)$. Quindi,

$$\begin{aligned}
&\Pi(v^{(1)}, ..., v^{(n)}) = TK_1 = TD_1 \cup TD_2 \ , \\
&\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Pi\Big(Te^{(1)} + Te^{(2)}, Te^{(2)}, ..., Te^{(n)}\Big) \\
&\qquad = \Pi\Big(T[e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}]\Big) \\
&\qquad = T\Pi(e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(2)}, ..., e^{(n)}) \\
&\qquad = TD_2 \cup TD_3 \\
&\qquad = TD_2 \cup (v^{(2)} + TD_1) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, poiché $\mathrm{mis}(TD_1 \cap TD_2) = 0$ e $\mathrm{mis}(TD_2 \cap TD_3) = 0$ (essendo $x \to Tx$ derivabile) e poiché la misura è invariante per traslazioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) &= \mathrm{mis}(TD_2) + \mathrm{mis}(TD_3) \\
&= \mathrm{mis}(TD_2) + \mathrm{mis}(TD_1) \\
&= \mathrm{mis}(TD_1 \cup TD_2) \\
&= \mathrm{mis}\,(\Pi(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ,
\end{aligned}$$

il che dimostra (20) nel caso $\det T > 0$; poiché $\det[v^{(1)} + v^{(2)}, v^{(2)}, ...] = \det[v^{(1)}, v^{(2)}, ...]$, il caso $\det T < 0$ segue immediatamente. Combinando (20) con la proprietà 1) si ottiene

$$\Delta(v^{(1)} + v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \tag{23}$$

per ogni $2 \le j \le n$. Sia ora a un numero diverso da 0. Allora da (18) (con $j = 2$) e da (20), si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) &= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)} + av^{(2)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&= \frac{1}{a}\Delta(v^{(1)}, av^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&= \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ .
\end{aligned} \tag{24}$$

Naturalmente per $a = 0$, l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro di (24) è banalmente vera. Usando ancora la proprietà 1), otteniamo, per ogni $2 \leq j \leq n$, e per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(v^{(1)} + av^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ ; \tag{25}$$

da tale relazione segue facilmente che, per ogni a_j,

$$\Delta(v^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} a_j v^{(j)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ , \tag{26}$$

che equivale alla (19) nel caso in cui w appartenga allo spazio vettoriale generato da $\{v^{(j)}, j \geq 2\}$. Naturalmente se $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ sono linearmente dipendenti, (19) è banalmente vera, essendo entrambi i membri a sinistra e destra dell'uguaglianza nulli. Assumiamo dunque $w =: v^{(1)}$, $v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ linearmente indipendenti, cosicché $v^{(1)}, ..., v^{(n)}$ forma una base in $\mathbb{R}^n$. Allora esistono n costanti a_i tali che $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)}$ ed usando (25) ed (10),

$$\begin{aligned}
&\Delta(v + w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(\sum_{i=1}^{n} a_i v^{(i)} + v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta((1 + a_1)v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = (1 + a_1)\Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \\
&\quad = \Delta(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(a_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_i v^{(i)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})) \\
&\quad = \Delta(w, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) + \Delta(v, v^{(2)}, ..., v^{(n)}) \ .
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione della proprietà 2) e quindi per quanto discusso sopra, vale (1). ∎