3 La curva di Peano

Proposizione 1 (a) *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n < m$. Se f è una funzione lipschitziana, allora $f(A)$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^m$.*
(b) *Esiste una funzione $\varphi \in C\Big([0,1],[0,1]^2\Big)$ tale che $\varphi([0,1]) = [0,1]^2$.*

Osservazione 2 (i) Dalla proposizione segue che la funzione φ in (b) non è lipschitziana.
(ii) La funzione φ costruita nel corso della dimostrazione che daremo del punto (b) della Proposizione 1, viene chiamata "la curva di Peano".
(iii) Generalizzando la costruzione che verrà presentata nella dimostrazione, per ogni $n \geq 3$, si possono costruire funzioni $\varphi \in C\Big([0,1],[0,1]^n\Big)$ tale che $\varphi([0,1]) = [0,1]^n$.
(iv) La funzione φ costruita nella dimostrazione risulta essere Hölderiana di esponente $\alpha = 1/2$.

Dimostrazione (a): Senza perdita di generalità, possiamo assumere che A sia limitato[1] e sia $R > 0$ tale che $A \subset [-R,R]^n$. Sia ora B l'immersione di A nell'iperpiano $\{x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$:

$$B = A \times \underbrace{\{0,...,0\}}_{(m-n)\ \text{volte}} .$$

L'insieme B è contenuto nel rettangolo degenere $[-R,R]^n \times \{0,...,0\}$ e dunque B è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^m$. Definiamo, ora,

$$x \in B \to F(x) := f(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^m .$$

Dalle ipotesi su f segue immediatamente che F è lipschitziana su B e dunque per la Proposizione 9.8 in [Chierchia, 1997] segue che $F(B) = f(A)$ è di misura nulla.

(b): La funzione φ verrà costruita come limite uniforme di funzioni $\varphi_k \in C([0,1],[0,1]^2)$. La costruzione iterativa delle funzioni φ_k è basata su opportune numerazioni delle suddivisioni del quadrato $[0,1]^2$ in 4^k quadrati di lato $1/2^k$, ovvero numerazioni della famiglia di quadrati

$$\mathcal{Q}^{(k)} := \left\{ \Big\{ \frac{i-1}{2^k} \leq x \leq \frac{i}{2^k}\ ,\ \frac{j-1}{2^k} \leq y \leq \frac{j}{2^k} \Big\} \quad \text{con} \quad 1 \leq i,j \leq 2^k \right\} . \tag{1}$$

[1] $A = \bigcup_{i\geq 1} B_i(0) \cap A$ e l'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla.

Lemma 3 *(i) Sia Q un quadrato (chiuso) in $\mathbb{R}^2$ di lato δ; denotiamo con L_i, $1 \le i \le 4$, i quattro lati del quadrato; denotiamo, poi, con L_{ij}, $1 \le j \le 2$ i due segmenti di lunghezza $\delta/2$ ottenuti dividendo in due il lato L_i. Per ogni i, i' e j esiste una ed una sola numerazione, $\{Q_\ell\}$, dei quattro quadrati (chiusi) di lato $\delta/2$ in cui è possibile suddividere Q in modo tale che si abbia*

$$\begin{array}{ll} (q1) & L_{ij} \subset Q_1 \ ; \\ (q2) & Q_\ell \text{ e } Q_{\ell+1} \text{ hanno un lato in comune} \ ; \\ (q3) & \text{un lato di } Q_4 \subset L_{i'} \ . \end{array}$$

(ii) Sia

$$Q_1^{(0)} := [0,1]^2 \ ; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &Q_1^{(1)} := \Big\{0 \le x \le 1/2 \ , \ 0 \le y \le 1/2\Big\} \ , \ Q_2^{(1)} := \Big\{1/2 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1/2\Big\} \\ &Q_3^{(1)} := \Big\{1/2 \le x \le 1 \ , \ 1/2 \le y \le 1\Big\} \ , \ Q_4^{(1)} := \Big\{0 \le x \le 1/2 \ , \ 1/2 \le y \le 1\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Per ogni $k \ge 1$ esiste una ed una sola numerazione, $\{Q_j^{(k)}\}$, $1 \le j \le 4^k$, della famiglia $\mathcal{Q}^{(k)}$ che soddisfi le seguenti condizioni

$$\begin{array}{ll} (c1) & Q_1^{(k)} \text{ ha un lato contenuto in } \{x=0\} \ ; \\ (c2) & Q_\ell^{(k)} \text{ e } Q_{\ell+1}^{(k)} \text{ hanno un lato in comune } \forall\ 1 \le \ell < 4^k \ ; \\ (c3) & \bigcup_{1 \le \ell \le 4} Q_{4j+\ell}^{(k)} = Q_{j+1}^{(k-1)} \ , \qquad \forall\ 0 \le j < 4^{k-1}; \\ (c4) & Q_{4^k}^{(k)} \text{ ha un lato contenuto in } \{x=0\} \ . \end{array}$$

Dimostrazione (del Lemma 3)
(i) La dimostrazione dell'affermazione (i) è una verifica diretta: vi sono, infatti, 8 modi di scegliere una coppia (i,j) (con $1 \le i \le 4$ e $1 \le j \le 2$) e altri quattro modi di scegliere $i' \in 1,2,3,4$. Questo significa che ci sono 32 casi da analizzare e si verifica immediatamente che per ognuno di questi casi vi è un'unica numerazione possibile[2]. Ad esempio, se consideriamo il quadrato di lato unitario $Q_1^{(0)}$ in (2); se chiamiamo L_1,...,L_4 i quattro lati contenuti, rispettivamente, nelle rette $\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $\{x=1\}$, $\{y=1\}$, e se L_{12} è definito da $0 \le y \le 1/2$ allora la numerazione $\{Q_j^{(1)}\}$ in (3) è l'unica numerazione

[2]In effetti, a meno di rotazioni nel piano, i casi si riducono a 8 (si può , infatti, assumere che il lato L_{ij} sia sempre nel lato "sinistro" del quadrato di partenza); a meno di rotazioni e riflessioni i casi sono solo 4.

dei quattro quadrati di lati $1/2$ in cui si può suddivere $Q_1^{(0)}$ soddisfacente $(q1) \div (q3)$ con $i = 1$, $j = 2$ e $i' = 1$ oppure $i' = 4$.

(ii) Procediamo per induzione su k. Per $k = 1$, la numerazione in (3) è chiaramente l'unica numerazione di $\mathcal{Q}^{(1)}$ che soddisfi $(c1) \div (c4)$. Sia, ora, $k \geq 2$ ed assumiamo assegnata la numerazione $\{Q_j^{(k-1}\}$ soddisfacente $(c1) \div (c4)$ (con k sostituito da $k-1$). Definiamo

$$\begin{aligned} L_0^{(k-1)} &:= \left\{(0, y) : \ 0 \leq y \leq \frac{1}{2^{k-1}}\right\} , \\ L_j^{(k-1)} &:= Q_j^{(k-1)} \cap Q_{j+1}^{(k-1)} , \qquad 1 \leq j < 4^{k-1} , \\ L_{4^{k-1}}^{(k-1)} &:= \left\{(0, y) : \ 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq y \leq 1\right\} , \end{aligned} \tag{4}$$

e si noti che, dalle $(c1) \div (c4)$ segue che

$$L_j^{(k-1)} \neq L_i^{(k-1)} , \qquad \forall\, j \neq i . \tag{5}$$

Si noti che, per $(c3)$, si deve avere che

$$Q_{4j}^{(k)} \subset Q_j^{(k-1)} , \qquad\qquad Q_{4j+1}^{(k)} \subset Q_{j+1}^{(k-1)} , \tag{6}$$

mentre, per $(c2)$, $Q_{4j}^{(k)}$ e $Q_{4j+1}^{(k)}$ devono avere un lato in comune. Ora possiamo costruire la numerazione $\{Q_j^{(k)}\}$ ordinando le suddivisioni di $Q_j^{(k-1)}$ ricorsivamente su j come segue. Poniamo

$$L_0^{(k)} := \left\{(0, y) : \ 0 \leq y \leq \frac{1}{2^k}\right\} . \tag{7}$$

Per il punto (i), esiste un'unica numerazione dei quattro quadrati di lato $1/2^k$ in cui è possibile suddividere $Q_1^{(k-1)}$ in modo tale che

$$\begin{aligned} &L_0^{(k)} \subset Q_1^{(k)} ; \\ &Q_\ell^{(k)} \text{ e } Q_{\ell+1}^{(k)} \text{ hanno un lato in comune } (1 \leq \ell \leq 3); \\ &\text{un lato di } Q_4^{(k)} \subset L_1^{(k-1)} . \end{aligned}$$

Le $(c1) \div (c3)$ sono chiaramente soddisfatte per $j = 0$ e $1 \leq \ell \leq 3$. Supponiamo, ora, di aver completato la numerazione dei quattro quadrati in cui si suddivide $Q_j^{(k-1)}$ con $1 \leq j < 4^{k-1}$, in modo tale che

$$\text{un lato di } Q_{4j}^{(k)} \subset L_j^{(k-1)} , \tag{8}$$

e di voler procedere alla numerazione relativa a $Q_{j+1}^{(k-1)}$. Poniamo

$$L_{4j}^{(k)} := Q_{4j}^{(k)} \cap L_j^{(k-1)} , \tag{9}$$

che, per (8) è un lato di $Q^{(k)}_{4j}$. Per il punto (i), esiste un'unica numerazione dei quattro quadrati di lato $1/2^k$ in cui è possibile suddividere $Q^{(k-1)}_{j+1}$ in modo tale che

$$\begin{aligned} &L^{(k)}_{4j} \subset Q^{(k)}_{4j+1} \ ; \\ &Q^{(k)}_{4j+\ell} \text{ e } Q^{(k)}_{4j+\ell+1} \text{ hanno un lato in comune } (1 \le \ell \le 3); \\ &\text{un lato di } Q^{(k)}_{4(j+1)} \subset L^{(k-1)}_{j+1} \ . \end{aligned}$$

Si noti che continuando tale costruzione, per (4), si avrà che

$$\text{un lato di } Q^{(k)}_{4^k} \subset \{x = 0\} \ . \quad \blacksquare \tag{10}$$

Riprendiamo la dimostrazione del punto (b) della Proposizione 1. Sia, per ogni $k \ge 0$, $\{Q^{(k)}_j\}_{1 \le j \le 4^k}$ la numerazione di $\mathcal{Q}^{(k)}$ del punto (ii) del Lemma 3. Per ogni $k \ge 1$ è facile costruire una funzione $\varphi_k \in C\Big([0,1],[0,1]^2\Big)$ tale che[3]

$$\varphi_k(t) \in Q^{(k)}_j \ , \qquad \forall\ t \in \left[\frac{j-1}{4^k}, \frac{j}{4^k}\right] \ , \quad \forall\ 1 \le j \le 4^k \ . \tag{11}$$

Dimostriamo che φ_k converge uniformemente su $[0,1]$. Sia $t \in [0,1)$. Esiste un unico $1 \le j \le 4^k$ tale che

$$\frac{j-1}{4^k} \le t < \frac{j}{4^k} \ ; \tag{12}$$

inoltre esiste un unico $1 \le i \le 4$ tale che

$$\frac{4(j-1)+(i-1)}{4^{k+1}} = \frac{j-1}{4^k} + \frac{i-1}{4^{k+1}} \le t < \frac{j-1}{4^k} + \frac{i}{4^{k+1}} = \frac{4(j-1)+i}{4^{k+1}} \ . \tag{13}$$

Da (11) ed (12) segue che $\varphi_k(t) \in Q^{(k)}_j$ mentre da (11) e da (13) segue che $\varphi_{k+1}(t) \in Q^{(k+1)}_{4(j-1)+i}$ che, per la $(c3)$, è contenuto in $Q^{(k)}_j$. Dunque sia $\varphi_k(t)$ che $\varphi_{k+1}(t)$ sono in $Q^{(k)}_j$ ma questo implica che

$$|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)|_\infty \le \frac{1}{2^k} \ . \tag{14}$$

[3] Ad esempio, se $x^{(k,j)}$ denota il punto di mezzo di $L^{(k)}_j$ ($:= Q^{(k)}_j \cap Q^{(k)}_{j+1}$ per $1 \le j < 4^k$, $L^{(k)}_0$ è come in (7) e $L^{(k)}_{4^k} := Q^{(k)}_{4^k} \cap \{x = 0\}$), una scelta possibile per φ_k è data da:

$$\varphi_k(t) := x^{(k,j-1)} + 4^k\left(t - \frac{j-1}{4^k}\right)\Big(x^{(k,j)} - x^{(k,j-1)}\Big) \ , \quad \forall\ t \in \left[\frac{j-1}{4^k}, \frac{j}{4^k}\right] \ .$$

Poiché tale relazione vale per ogni $t \in [0,1)$ segue che

$$\sup_{t\in[0,1]} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)|_\infty \le \frac{1}{2^k} , \qquad \forall\, k \ge 1 . \tag{15}$$

Siano, ora, k e n due interi positivi. Da (15) segue che, per ogni $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+n}(t) - \varphi_k(t)|_\infty &\le \sum_{j=k}^{k+n-1} |\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)|_\infty \\ &\le \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} , \end{aligned} \tag{16}$$

il che implica che la successione $\{\varphi_k\}$ converge uniformemente ad una funzione $\varphi \in C\Big([0,1],[0,1]^2\Big)$. Prendendo il limite per n che tende ad infinito in (16) si ottiene che

$$|\varphi_k(t) - \varphi(t)|_\infty \le \frac{1}{2^{k-1}} , \qquad \forall\, t \in [0,1] , \qquad \forall\, k \ge 1 . \tag{17}$$

Resta da dimostrare la suriettività di φ. Fissiamo $\bar{x} \in [0,1]^2$. Per ogni $k \ge 1$ esiste un $j = j(k,\bar{x})$ tra 1 e 4^k tale che $\bar{x} \in Q_j^{(k)}$ e, per (11), possiamo scegliere $t_k \in [0,1]$ per il quale si abbia $\varphi_k(t_k) \in Q_j^{(k)}$. Poiché sia $\varphi_k(t_k)$ che $\bar{x}$ appartengono a $Q_j^{(k)}$ che è un quadrato di lato $1/2^k$ si ha che

$$|\varphi_k(t_k) - \bar{x}|_\infty \le \frac{1}{2^k} , \qquad \forall\, k \ge 1 . \tag{18}$$

Poiché $[0,1]$ è compatto, esiste una successione k_j tale che $t_{k_j} \to \bar{t} \in [0,1]$. Facciamo vedere che $\varphi(\bar{t}) = \bar{x}$, il che concluderà la dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché φ è continua e poiché $1/2^{k_j} \to 0$, esiste j tale che

$$|\varphi(t_{k_j}) - \varphi(\bar{t})|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} , \qquad\qquad \frac{1}{2^{k_j-1}} < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{19}$$

Da (19), (17) e (18) segue che

$$\begin{aligned} |\varphi(\bar{t}) - \bar{x}|_\infty &\le |\varphi(\bar{t}) - \varphi(t_{k_j})|_\infty + |\varphi(t_{k_j}) - \varphi_{k_j}(t_{k_j})|_\infty + |\varphi_{k_j}(t_{k_j}) - \bar{x}|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^{k_j-1}} + \frac{1}{2^{k_j}} < \varepsilon . \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di ε implica che $\varphi(\bar{t}) = \bar{x}$. ∎

Esercizio 1 Disegnare la traccia della curva φ_k definita nella nota 3 per $k \leq 5$.

Esercizio 2 Dimostrare che la funzione φ costruita nella dimostrazione della Proposizione 1 è unica nel senso che dipende solo dalla numerazione di $\mathcal{Q}^{(k)}$ e dalla richiesta (11).

Esercizio 3 Dimostrare che se $g \in C\Big([0,1],[0,1]^2\Big)$ è suriettiva allora non è iniettiva.

Esercizio 4 Dimostrare il punto (iv) dell'Osservazione 2.

Suggerimenti e/o soluzioni:

Es. 3: Se g fosse iniettiva, la sua inversa sarebbe continua. Sia Γ una qualunque curva chiusa in $[0,1]^2$ (non banale) e sia $\gamma : t \in [a,b] \to \Gamma$ una parametrizzazione di Γ iniettiva su (a,b). La funzione $h : t \in [a,b] \to [0,1]$ data da $h = g^{-1} \circ \gamma$ sarebbe una funzione continua su $[a,b]$, iniettiva (e quindi strettamente monotona) e tale che $h(a) = h(b)$ e questo è impossibile.

Es. 4: Siano $t \neq t'$ due punti in $[0,1]$. Esiste $k \geq 0$ tale che $1/4^{k+1} \leq |t-t'| < 1/4^k$. Si noti che

$$\frac{1}{2^k} \leq \sqrt{2}\,|t-t'|^{\frac{1}{2}} \ .$$

Poiché $|t-t'| < 1/4^k$, t e t' o appartengono ad un intervallo della forma $\left[\frac{j-1}{4^k}, \frac{j}{4^k}\right]$ oppure appartengonno a due tali intervalli consecutivi; in entrabi i casi, dalla costruzione fatta sopra, si ha che $|\varphi_k(t)-\varphi_k(t')|_\infty \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Dunque

$$\begin{aligned} |\varphi(t)-\varphi(t')|_\infty &\leq |\varphi(t)-\varphi_k(t)|_\infty + |\varphi_k(t)-\varphi_k(t')|_\infty + |\varphi_k(t')-\varphi(t')|_\infty \\ &\leq \frac{3}{2^{k-1}} = \frac{6}{2^k} \leq 6\sqrt{2}\,|t-t'|^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$