4 Il lemma di Sard in $\mathbb{R}$

Proposizione 1 (Lemma di Sard in $\mathbb{R}$) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f \in C^2(A, \mathbb{R})$. Sia $A_0 = \{x \in A : f'(x) = 0\}$. Allora $f(A_0)$ è un insieme di misura nulla.*

Osservazione 2 (i) La Proposizione 1 vale sotto la sola ipotesi che $f \in C^1(A)$.
(ii) Il Lemma di Sard si estende al caso generale di funzioni C^1 da $A \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$; si veda, ad esempio, [J. Milnor, *Topology from a differentiable point of view*, The University press of Virginia, 1965].

Per dimostrare la Proposizione 1 useremo il seguente risultato topologico.

Lemma 3 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una famiglia numerabile di sfere B_i tali che $\overline{B_i} \subset A$ e $A = \bigcup_i B_i$.*

Dimostrazione Se $A = \mathbb{R}^n$ basta prendere $B_i = B_i(0)$ (la sfera di centro l'origine e raggio $i \in \mathbb{Z}_+$). Assumiamo ora che $A \subsetneqq \mathbb{R}^n$ (cosicché $\partial A \neq \emptyset$) e cominciamo con l'osservare i seguenti fatti (**esercizio**):

(i) se $x \in A$ allora $\operatorname{dist}(x, \partial A) := \inf_{y \in \partial A} |x - y| > 0$;

(ii) se $x \in A$ e se $\delta := \operatorname{dist}(x, \partial A)$ allora $B_\delta(x) \subset A$;

(iii) se $x \in A$ e se $r < \operatorname{dist}(x, \partial A)$ allora $\overline{B_r(x)} \subset A$;

(iv) se $B_\rho(x) \subset A$ e $r < \rho$ allora $r < \operatorname{dist}(x, \partial A)$.

Consideriamo ora i seguenti insiemi:

$$\mathcal{A} := \mathbb{Q}^n \cap A\,, \qquad \mathcal{J}_x := \Big\{ r \in \mathbb{Q} :\ 0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial A) \Big\}\,. \tag{1}$$

Poiché $\mathcal{A}$ è numerabile, la famiglia di sfere definita come

$$\mathcal{B} := \Big\{ B_r(x) :\ x \in \mathcal{A}\,,\ r \in \mathcal{J}_x \Big\} \tag{2}$$

è numerabile. Poiché $\mathcal{A} \subset A$, da (iii) e dalla definizione di $\mathcal{J}_x$ segue che $\overline{B} \subset A$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. Facciamo, ora, vedere che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$. Sia $y \in A$ e sia $\delta := \operatorname{dist}(y, \partial A)$. Poiché $\mathcal{A}$ è denso in A, esiste $x \in \mathcal{A}$ tale $|x-y| < \delta/4$. Sia r un razionale tale che

$$\frac{\delta}{4} < r < \frac{3}{4}\,\delta \ .$$

Se $z \in B_{\frac{3}{4}\delta}(x)$ allora

$$|z-y| \leq |z-x| + |x-y| < \frac{3}{4}\delta + \frac{\delta}{4} = \delta \ ,$$

e, cioè, $z \in B_\delta(y) \subset A$; dunque $B_{\frac{3}{4}\delta}(x) \subset A$ e (per (iv)) $r < \operatorname{dist}(x, \partial A)$ il che implica che $r \in \mathcal{J}_x$. D'altra parte,

$$|y-x| < \frac{\delta}{4} < r \ ,$$

e, quindi, $y \in B_r(x)$. ∎

Dimostrazione (della Proposizione 1) Dal lemma e dal fatto che un'unione numerabile di insiemi di misura nulla è di misura nulla segue che basta dimostrare la tesi per un intervallo aperto non vuoto $B \subset A$ tale che $\overline{B} \subset A$. Sia, dunque, $B = (a,b)$ un tale intervallo e sia $M = \max_{[a,b]} |f''|$. Per ogni $N \in \mathbb{Z}_+$, dividiamo l'intervallo B in N intervalli contigui I_i di lunghezza $(b-a)/N$ e siano I_{i_j}, $j \leq N_0 \leq N$, tutti gli intervalli tali che $I_{i_j} \cap A_0 \neq \emptyset$. Dunque

$$B_0 := A_0 \cap B = \bigcup_{j=1}^{N_0} I_{i_j} \cap A_0 \ , \qquad I_{i_j} \cap A_0 \neq \emptyset \ . \tag{3}$$

Per ogni j fissiamo $x_j \in A_0 \cap I_{i_j}$; chiamiamo $y_j := f(x_j)$ e definiamo intervalli

$$E_j := \Big[y_j - \frac{c_1}{N^2}, y_j + \frac{c_1}{N^2}\Big] \ , \qquad c_1 := \frac{M(b-a)^2}{2} \ .$$

Vogliamo far vedere che

$$f(B_0) \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} E_j \ . \tag{4}$$

Dalla formula di Taylor al secondo ordine segue che, per ogni $x \in I_{i_j}$,

$$\Big| f(x) - f(x_j) \Big| \leq c_2\, |x - x_j|^2 \ , \qquad c_2 := \frac{M}{2} \ . \tag{5}$$

Ora, $y \in f(B_0)$ significa che esiste $x \in B_0$ tale che $f(x) = y$ e, dunque, (per (3)) esiste un j tale che $x \in I_{i_j}$ e per (5) si ha che

$$\left| f(x) - y_j \right| \leq c_2 \, |x - x_j|^2 \leq c_2 \, \frac{(b-a)^2}{N^2} = \frac{c_1}{N^2} \ ,$$

e quindi $f(x) \in E_j$, il che dimostra (4). Inoltre

$$\operatorname{mis}_1 \Big(\bigcup_{j=1}^{N_0} E_j \Big) \leq \sum_{j=1}^{N_0} \operatorname{mis}_1 (E_j) \leq \sum_{j=1}^{N_0} \ \frac{2c_1}{N^2} = N_0 \ \frac{2c_1}{N^2} \leq \frac{2c_1}{N} \ . \tag{6}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ sia N tale che $2c_1/N < \varepsilon$. L'insieme $\bigcup_j E_j$ è un insieme elementare che ricopre $f(B_0)$ ed è di misura inferiore ad ε, il che mostra che l'insieme $f(B_0)$ è di misura nulla. ∎