Versione del 15/12/04

7 Trasformata di Fourier

Definizione 1 *Sia $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Si definisce la trasformata di Fourier*[1] *di f come*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} đx \ , \qquad đx := \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ . \tag{7.1}$$

Proposizione 2 *La trasformata di Fourier $\hat{f}$ di una funzione $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ gode delle seguenti proprietà:*
(i) $\hat{f}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ e

$$\sup_{\mathbb{R}} |\hat{f}| \leq \|f\|_1 \ :=:= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| đx \ . \tag{7.2}$$

(ii) Sia p un intero positivo. Se $x \to x^k f(x) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni intero $0 \leq k \leq p$, allora $\hat{f} \in C^p(\mathbb{R})$ e

$$\partial_\xi^k \hat{f}(\xi) = (-i)^k \widehat{(x^k f)}(\xi) \ , \qquad \forall \ k \leq p \ ; \tag{7.3}$$

inoltre le funzioni $\partial_\xi^k \hat{f}$ sono, per $0 \leq k \leq p$, uniformemente continue su $\mathbb{R}$.
(iii) Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \leq p$, allora

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \ , \qquad \forall \ k \leq p \ . \tag{7.4}$$

(iv) Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \leq p$, allora

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(p)}\|_1}{|\xi|^p} \ , \qquad \forall \ \xi \neq 0 \ , \tag{7.5}$$

e

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{1+|\xi|^p} \ , \qquad M := 2 \ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(p)}\|_1\} \ . \tag{7.6}$$

Nel corso della dimostrazione useremo il seguente semplice

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768 (Auxerre) -1830 (Parigi).

Lemma 3 *Siano* g_j $(j \geq 1)$, g *e* G *funzioni in* $\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ *tali che*

$$|g_j| \leq G \ . \tag{7.7}$$

Sia $\{A_k\}$ *una successione di insiemi, misurabili secondo Peano–Jordan, su cui* g_j,g *e* G *siano Riemann–integrabili e tali che* $A_k \subset A_{k+1}$, $\bigcup_k A_k = \mathbb{R}$. *Se, per ogni* k, $g_j \to g$ *uniformemente su* A_k, *allora* $\|g_j - g\|_1 \to 0$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di integrale generalizzato segue che esiste k tale che

$$\int_{A_k^c} |g| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \qquad \int_{A_k^c} |G| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{7.8}$$

Da tale relazione e da (7.7) segue anche che, per ogni $j \geq 1$,

$$\int_{A_k^c} |g_j| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{7.9}$$

Poiché g_j converge a g uniformemente su A_k, esiste j_0 tale che

$$|g_j(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \, \mathrm{mis}(A_k)}$$

per ogni $x \in A_k$ e per ogni $j \geq j_0$. Dunque, per ogni $j \geq j_0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g_j - g| dx = \int_{A_k^c} |g_j - g| dx + \int_{A_k} |g_j - g| dx \leq \int_{A_k^c} (|g_j| + |g|) dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \ . \quad \blacksquare$$

Dimostrazione (della Proposizione 2) La (7.2) è ovvia. Dimostriamo l'uniforme continuità di $\hat{f}$. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, esiste un insieme A misurabile secondo Peano-Jordan, su cui f è Riemann integrabile e tale che

$$\int_{A^c} |f| đx \ < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Sia δ_0 tale che

$$\left| e^{it} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_1)} \ , \qquad \forall \ |t| < \delta_0 \ ; \tag{7.10}$$

sia $M > 0$ tale che $A \subset [-M, M]$ e sia $\delta := \delta_0 / M$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < \delta$ si ha che

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \ = \ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \Big(e^{-ixh} - 1 \Big) đx \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{-ixh}-1| đx \\
&= \int_{A^c} |f(x)|\,|e^{-ixh}-1| đx + \int_A |f(x)|\,|e^{-ixh}-1| đx \\
&\leq 2\int_{A^c} |f(x)| đx + \int_A |f(x)|\,|e^{-ixh}-1| đx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1+\|f\|_1)}\int_A |f(x)| đx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(1+\|f\|_1)}\|f\|_1 \leq \varepsilon\ ,
\end{aligned}
$$

avendo usato il fatto che se $|x| \leq M$ allora si ha che $|-ixh| < \delta_0$ il che permette l'uso della (7.10).

(ii) Dimostriamo dapprima la (7.3) per $p = 1$. Sia $h_j \neq 0$ una qualunque successione convergente a 0 e sia

$$
g_j(x) := f(x)e^{-ix\xi}\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j}\ , \quad g(x) := (-i)xf(x)e^{-ix\xi}\ .
$$

Osserviamo, ora, che: $\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j}$ converge a $(-ix)$ uniformemente su[2] $[-a,a]$ per ogni $a > 0$; che[3]

$$
\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j}\right| \leq |x|\ ;
$$

che $|g_j|, |g| \leq G(x) := |x||f(x)| \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Sia ora A_k una succesione di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan su cui $xf(x)$ sia Riemann integrabile e tali che $\sup_k \int_{A_k} |xf| < \infty$. Poiché gli A_k sono limitati, dalle osservazioni fatte segue che

$$
|g_j(x) - g(x)| \leq \Big(\sup_{A_k} |xf|\Big)\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j} + ix\right|
$$

tende uniformemente a zero su A_k e dunque la (7.3) per $p = 1$ segue dal lemma. Il caso con p arbitrario segue per induzione: supponiamo che $x^p f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e che la (7.3) sia vera per $p-1$. Allora poiché $x(x^{p-1}f) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, usando la (7.3) con $k = 1$, si ha che

$$
\partial_\xi \widehat{(x^{p-1}f)}(\xi) = -i\widehat{(x^p f)}(\xi)
$$

[2]Dato $\varepsilon > 0$, sia δ tale che $\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| < \varepsilon/a$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $0 < |z| < \delta$ e sia j_0 tale che $|h_j| < \delta/a$, $\forall\ j \geq j_0$. Allora, $\forall\ 0 < |x| \leq a$, si ha che $\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{h_j} + ix\right| = |x|\left|\frac{e^{-ixh_j}-1}{-ixh_j} - 1\right| \leq a\varepsilon/a$.

[3] Per ogni $0 \neq t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right| \leq 1$. Infatti $|e^{it}-1| = |\int_0^t \frac{e^{is}}{i} ds| \leq \int_0^{|t|} |e^{is}/i| ds = |t|$.

che, insieme alla (7.3) con $k = p-1$, implica la (7.3) anche con $k = p$. L'uniforme continuità di $\partial_\xi^k \hat{f}$ segue, ora, dalla (7.3) e dal punto (i).
(iii) Sia $p = 1$ e assumiamo, dapprima, che $f(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Allora,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\text{đ}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f'(x)e^{-ix\xi}\text{đ}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big[\frac{f(x)e^{-ix\xi}}{\sqrt{2\pi}}\Big]_{-R}^{R} + i\xi\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} fe^{-ix\xi}\text{đ}x \\ &= i\xi\hat{f}(\xi)\ .\end{aligned}$$

In generale da $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ non segue che $|f(x)| \to 0$ per $|x| \to \infty$ ma è sempre possibile trovare due successioni $R_j \to \infty$ e $R'_j \to -\infty$ tali che $f(R_j)$ e $f(R'_j)$ tendano a 0 per[4] $j \to \infty$: questo è sufficiente per ripetere l'argomento dato. Il caso con p arbitrario si ottiene per iterazione.
La (7.5) segue immediatamente da (7.4) insieme a (7.2). Per la (7.6) si usi la (7.2) nell'intervallo $|\xi| \le 1$ e la (7.5) per $|\xi| \ge 1$. ∎

Osservazione 4 Chiaramente se[5] $f \in C_0^p(\mathbb{R})$ allora $f^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \le p$ e dunque, per tali f vale la (7.6). In particolare se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la sua trasformata di Fourier decade più rapidamente di qualunque potenza.

Il prossimo risultato spiega come ricostruire la funzione f a partire dalla sua trasformata di Fourier.

Proposizione 5 (Teorema di inversione per funzioni C_0^2) *Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, allora*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\ \text{đ}\xi\ , \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\ . \tag{7.11}$$

Vale inoltre la seguente identità di Parseval[6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \text{đ}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \text{đ}x\ . \tag{7.12}$$

---

[4] Ad esempio, $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}|f| = \int_0^\infty |f| < \infty$ e dunque per ogni $j \ge 1$ esiste $k = k_j$ tale che $\int_{k_j-1}^{k_j}|f| < 1/j$. Da questo segue che esiste $R_j \in [k_j - 1, k_j]$ tale che $|f(R_j)| < 1/j$.

[5] Si ricorda che, per un aperto $E \subset \mathbb{R}^n$, $C_0^p(E)$ denota la classe delle funzioni C^p con supporto compatto contenuto in E.

[6] Marc-Antoine Parseval des Chênes, 1755 (Rosières-aux-Saline) -1836 (Parigi).

La dimostrazione, oltre che sulle proprietà della trasformata e delle serie di Fourier è basata sulle approssimazioni discrete dell'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$; il seguente risultato sarà sufficiente per i nostri scopi.

Lemma 6 *Sia $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tale che esistano due costanti $M > 0$ e $\alpha > 1$ tali che*

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1 + |x|^\alpha} \ , \qquad \forall \ x \in \mathbb{R} \ . \tag{7.13}$$

Allora $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \ \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \ . \tag{7.14}$$

Dimostrazione Da (7.13) segue immediatamente che $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Dimostriamo, ora, che dalle ipotesi segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 2$ tale che[7]

$$\int_{\{|x| \geq R-1\}} |\varphi(x)| \ dx < \varepsilon \ ; \qquad \delta \sum_{|n| \geq [R/\delta]} |\varphi(\delta n)| < \varepsilon \ , \quad \forall \ 0 < \delta < 1 \ . \tag{7.15}$$

Infatti, dalla (7.13) segue che

$$\int_{\{|x| \geq R-1\}} |\varphi(x)| \ dx \leq 2M \int_{R-1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \ dx = \frac{2M}{\alpha - 1} \ \frac{1}{(R-1)^{\alpha-1}} \ ,$$

che implica la prima delle (7.15) con $R \geq R_0(\varepsilon) > 1$. Analogamente, per ogni $\delta \in (0, 1)$ e per ogni $R > 2$ si ha che

$$\begin{aligned} \delta \sum_{|n| \geq [R/\delta]} |\varphi(\delta n)| &\leq \delta M \sum_{|n| \geq [R/\delta]} \frac{1}{(|n|\delta)^\alpha} = \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \sum_{j \geq [R/\delta]} \frac{1}{j^\alpha} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \int_{[R/\delta]-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = 2M \int_{\delta[R/\delta]-\delta}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \\ &\leq 2M \int_{R-2}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{2M}{\alpha - 1} \frac{1}{(R-2)^{\alpha-1}} \ , \end{aligned}$$

da cui segue la seconda delle (7.15) per R sufficientemente grande; nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $\delta[R/\delta] - \delta \geq R - 2\delta \geq R - 2$.
Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia R tale che

$$\int_{\{|x| > R-1\}} |\varphi(x)| \ dx < \frac{\varepsilon}{3} \ , \qquad \delta \sum_{|n| \geq [R/\delta]} |\varphi(\delta n)| < \frac{\varepsilon}{3} \ . \tag{7.16}$$

[7] Come al solito $[x]$ denota il più grande intero $m \leq x$.

Sia $0 < \delta_0 < 1$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{6R} , \qquad \forall\, x, y \in \, [-R, R] \, , \quad |x - y| < \delta_0 \, . \tag{7.17}$$

Per ogni $0 < \delta < \delta_0$ poniamo

$$N_\delta := [R/\delta] \, , \qquad R_\delta := \delta N_\delta \, , \tag{7.18}$$

cosicché

$$\frac{R}{\delta} - 1 < N_\delta \le \frac{R}{\delta} \, , \qquad R - \delta < R_\delta \le R \, . \tag{7.19}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx - \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(\delta n) \Big| \\
&\quad \le \Big| \int_{-R_\delta}^{R_\delta} \varphi(x) dx - \delta \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \varphi(\delta n) \Big| + \int_{\{|x| \ge R_\delta\}} |\varphi(x)| dx + \delta \sum_{|n| \ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad = \Big| \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \int_{\delta n}^{\delta n + \delta} \Big(\varphi(x) - \varphi(\delta n)\Big) dx \Big| + \int_{\{|x| \ge R_\delta\}} |\varphi(x)| dx + \delta \sum_{|n| \ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \int_{\delta n}^{\delta n + \delta} |\varphi(x) - \varphi(\delta n)| dx + \int_{\{|x| \ge R - 1\}} |\varphi(x)| dx + \delta \sum_{|n| \ge N_\delta} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le 2 N_\delta \, \delta \, \frac{\varepsilon}{6R} + \frac{2}{3}\varepsilon = R_\delta \, \frac{\varepsilon}{3R} + \frac{2}{3}\varepsilon \le \varepsilon \, . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostrazione (della Proposizione 5) Sia $T_0 > 0$ tale che $\operatorname{supp} f \subset [-T_0/2, T_0/2]$ e, per $T \ge T_0$, sia f_T la funzione periodica di periodo T che coincide con f in $[-T/2, T/2]$. Allora $f_T \in C^2(\mathbb{R})$ e dai risultati sulle serie di Fourier[8] segue che, per ogni $|x| \le T/2$,

$$f(x) = f_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{T,n} e^{i \frac{2\pi}{T} n x} \, , \qquad (|x| \le T/2) \, , \tag{7.20}$$

dove la serie converge totalmente e

$$\hat{f}_{T,n} \;\; := \;\; \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} \, dx$$

[8]Per una funzione periodica di periodo T (ed integrabile) $\hat{f}_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} n x} dx$ e la sua serie di Fourier è $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{i \frac{2\pi}{T} n x}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} \, đx \\
&:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{T} \hat{f}\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big) \ . \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

Dunque, per $T \geq 2|x|$,

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T} \hat{f}\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big) \ e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \ .
$$

Ma dal punto (iv) della Proposizione 2 segue che

$$
|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{1+|\xi|^2} \ ,
$$

per qualche $M > 0$ e quindi la (7.11) segue dal Lemma 6 applicato alla funzione

$$
\varphi(\xi) := \hat{f}(\xi) \exp(ix\xi)
$$

(e con $\delta = 2\pi/T$).
Analogamente (e usando le stesse notazioni), dalla formula di Parseval per serie di Fourier e dalla (7.21) segue che

$$
\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f_T|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_{T,n}|^2 = \frac{2\pi}{T^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\hat{f}\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\Big|^2 \ .
$$

Moltiplicando per T tale relazione e mandando $T \to \infty$ si ottiene, per il[9] Lemma 6, la relazione (7.12). ▮

La Proposizione 5 si generalizza in vari modi; ad esempio vale la seguente

Proposizione 7 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per $k = 0, 1, 2$. Allora vale la formula* (7.11)*. Se, inoltre, $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$, allora vale anche l'identità di Parseval* (7.12)*.*

Dimostrazione L'idea della dimostrazione è basata sull'approssimare f con funzioni C^2 a supporto compatto. Sia $\varphi \in C^\infty$ una funzione monotona non crescente tale che:

$$
\varphi(x) := \begin{cases} 1 \ , & \text{se } x \leq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{se } x \geq 1 \ . \end{cases} \qquad (7.22)
$$

[9] Si ricordi l'osservazione 4.

A partire da φ, per $R>0$, costruiamo una funzione ψ_R pari, di classe C^∞, con supporto in $[-R-1, R+1]$ e che valga 1 per $|x| \le R$, ponendo:

$$\psi_R(x) := \begin{cases} \varphi(x-R) \ , & \text{se } x \ge 0 \ , \\ \psi_R(-x) \ , & \text{se } x < 0 \ . \end{cases} \tag{7.23}$$

Poniamo $f_R := f\psi_R$. Chiaramente $f_R \in C_0^2$ e quindi vale la (7.11) con f_R al posto di f. Poiché f_R coincide con f se $|x| \le R$, per ogni $R>0$ e per ogni $|x| \le R$, si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_R(\xi) e^{ix\xi} đ\xi \ , \qquad |x| \le R \ . \tag{7.24}$$

Per prendere il limite per $R \to \infty$ in tal relazione ed ottenere la (7.11), useremo il Lemma 3. Dalle ipotesi su f e dalla Proposizione 2, (7.6), segue che

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{M_1}{1+|\xi|^2} \ , \qquad M_1 := 2 \ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(2)}\|_1\} \ . \tag{7.25}$$

Osserviamo che, se

$$c := \max\{1 \ , \ \sup_{[0,1]} |\varphi'| \ , \ \sup_{[0,1]} |\varphi''| \ \} \ , \tag{7.26}$$

allora

$$\max\{ \ 1 \ , \ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R'| \ , \ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R''| \ \} \le c \ . \tag{7.27}$$

Dunque, essendo $f_R'' := (f\psi_R)'' = f''\psi_R + 2f'\psi_R' + f\psi_R''$, si ha che

$$\|f_R''\|_1 \le \|f''\|_1 + 2\|f'\psi_R'\|_1 + \|f\psi_R''\|_1 \le c\Big(\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1\Big) \ . \tag{7.28}$$

Quindi, poiché $\|f_R\|_1 \le \|f\|_1$, per la (7.6), si ha che

$$|\hat{f}_R(\xi)| \le \frac{M_2}{1+|\xi|^2} \ , \qquad M_2 := 2c\Big(\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1\Big) \ . \tag{7.29}$$

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_R(\xi)\exp(ix\xi) \to \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)$ uniformemente per $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}_R(\xi) - \hat{f}(\xi)| &:= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\psi_R(x)-1) \ e^{-ix\xi} đx\Big| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \ |\psi_R(x)-1| đx \\ &\le \int_{\{|x|\ge R\}} |f(x)| đx \end{aligned} \tag{7.30}$$

e quest'ultimo integrale tende a 0 quando $R \to \infty$ essendo $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Ora, se R_j è una qualunque successione tendente a $+\infty$, e se

$$g_j(\xi) := \hat{f}_{R_j}(\xi)\exp(ix\xi) \ , \quad g(\xi) := \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi) \ , \quad G(\xi) := M_2/(1+|\xi|^2) \ ,$$

la (7.11) segue dal Lemma 3.
Ora, assumiamo anche che $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$. Dalla (7.12) per funzioni C_0^2 segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_R(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f_R(x)|^2 dx \ . \tag{7.31}$$

Poiché

$$\int_{-R}^{R} |f|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_R|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \ ,$$

e poiché $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$, si ha che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_R|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \ . \tag{7.32}$$

Poiché[10]

$$\Big| |\hat{f}_R(\xi)|^2 - |\hat{f}(\xi)|^2 \Big| \le |\hat{f}_R(\xi) - \hat{f}(\xi)| \ |\hat{f}_R(\xi) + \hat{f}(\xi)| \ ,$$

da (7.30) e dalla limitatezza di $\hat{f}$ e $\hat{f}_R$ (vedi (7.25) e (7.29)) segue che $|\hat{f}_R(\xi)|^2$ converge, per $R \to \infty$, a $|\hat{f}(\xi)|^2$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Queste osservazioni permettono di prendere il limite per $R \to \infty$ in (7.31) ed ottenere, per il Lemma 3, la (7.12). ∎

Concludiamo questa breve discussione sulla trasformata di Fourier con il "Lemma di Riemann-Lebesgue":

Proposizione 8 *Sia $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Allora $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ esiste un aperto $A \subset \mathbb{R}$ misurabile secondo Peano-Jordan, su cui f è Riemann integrabile e

$$\int_{A^c} |f| \le \frac{\varepsilon}{3} \ . \tag{7.33}$$

Inoltre[11] esiste $\psi \in C_0^\infty(A)$ tale che

$$\int_A |f - \psi| đx < \frac{\varepsilon}{3} \ . \tag{7.34}$$

---

[10]Si ricorda che per ogni coppia di numeri complessi z e w si ha che $\Big||z|^2 - |w|^2\Big| \le |z-w| \ |z+w|$.

[11]Si ricorda che se $g \in \mathcal{R}_1(A)$, A misurabile secondo Peano-Jordan, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\psi \in C_0^\infty(A)$ tale che $\int_A |g - \psi| < \varepsilon$.

Sia, ora, $M > 0$ tale che $|\hat{\psi}(\xi)| \leq \varepsilon/3$ per ogni $|\xi| \geq M$ (tale M esiste per l'osservazione 4). Allora per $|\xi| \geq M$ si ha che[12]

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\Big| \leq \Big|\int_A f(x)e^{-ix\xi}\Big| + \int_{A^c}|f| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \Big|\int_A f(x)e^{-ix\xi}\Big| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_A |f-\psi| \ + \ \Big|\int_A \psi e^{-ix\xi}\Big| \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \int_A |f-\psi| \ + \ |\hat{\psi}(\xi)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[12] I seguenti integrali si intendono tutti divisi per $\sqrt{2\pi}$.