con δ_1 , $x_2 - x_1$ con δ_2 ,..., $b - x_{n-1}$ con δ_n e con ε_i dei numeri positivi minori di 1. Il valore della somma

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

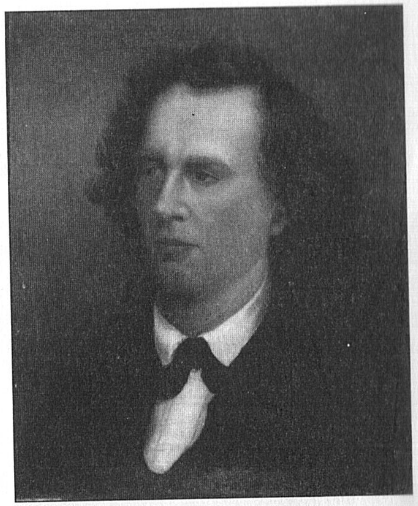
dipenderà allora dalla scelta degli intervalli δ e delle grandezze ε. Se esso ha la proprietà, comunque siano scelti i δ e gli ε, di avvicinarsi infinitamente a un limite fissato A, quando i δ tendono tutti verso 0, allora tale limite si dice il valore dell'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ [...]

7. La teoria dei numeri reali e l'aritmetizzazione dell'analisi

Gli sviluppi dell'analisi nell'Ottocento, soprattutto in relazione alla teoria dei limiti che ne costituiva la base, resero sempre più urgente una definizione precisa e non equivoca dei numeri reali e delle loro proprietà. L'invenzione dell'algebra da parte dei matematici arabi aveva determinato l'introduzione tra i numeri di grandezze irrazionali, che contrariamente a quanto aveva fatto la matematica greca, erano comunemente accettate come numeri a tutti gli effetti, anche se conservavano l'appellativo di «numeri surdi», risultato da una serie di traduzioni dal greco ἄλογος, indicibile, impronunciabile, termine con cui venivano designate le grandezze avente un rapporto irrazionale, all'arabo «asam», muto, ma anche sordo e di qui al latino «surdus». Tali numeri, come $\sqrt{2}$ o π, erano ormai di uso comune e non suscitavano particolari problemi, almeno finché essi venivano considerati isolatamente, ad esempio come soluzioni di equazioni algebriche. Gli sviluppi del calcolo infinitesimale, soprattutto con la sistemazione rigorosa dei suoi fondamenti, resero necessaria una nuova riflessione sulla struttura del sistema dei numeri reali e sulle sue proprietà. L'esigenza di dare una dimostrazione rigorosa dei teoremi fondamentali del calcolo, primo fra tutti quello degli zeri di una funzione continua, richiedeva infatti di definire chiaramente le proprietà del sistema dei numeri reali nel suo insieme, in primo luogo la continuità (oggi meglio indicata come «completezza»). Non era più questione di ampliare il panorama numerico con l'aggiunta di questo o quel numero irrazionale; occorreva una vera e propria teoria dei numeri reali senza la quale il progresso dell'analisi non avrebbe potuto fondarsi su basi certe.

Campione di questa esigenza fu il matematico tedesco Karl Weierstrass, che più volte nelle sue lezioni aveva insistito sulla necessità di una definizione precisa di numero reale. Toccò però ad altri pubblicare per primi le loro ricerche in tale senso. Nel 1872 uscirono addirittura quattro scritti nei

quali venivano posti i fondamenti dei numeri reali, ad opera di Georg Cantor, di Edward Heine, di Charles Meray e di Richard Dedekind.


Karl Weierstrass (1815-1897)

7. 1. *I reali di Cantor-Heine-Meray*

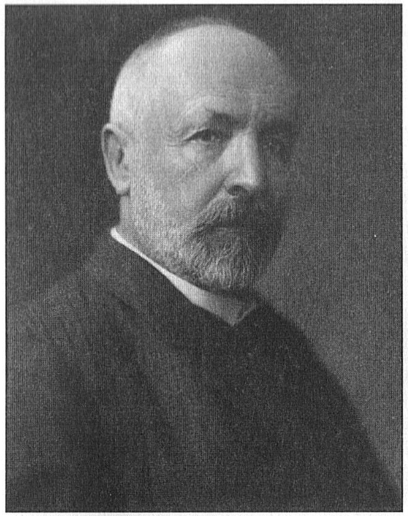
Nell'articolo intitolato *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (*Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche*), apparso nel 1872 sui «Mathematische Annalen», Georg Cantor si trova a considerare insiemi infiniti di punti in relazione al problema della convergenza delle serie. Per poter operare rigorosamente premette allora una teoria aritmetica dei numeri reali su cui darà maggiori dettagli successivamente.

L'ingrediente fondamentale della teoria di Cantor sono le cosiddette «successioni di Cauchy», successioni di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ i cui termini diventano sempre più vicini tra loro. Più precisamente, si tratta di successioni tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero n_1 tale che per ogni $n > n_1$ e per qualsiasi m si abbia $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$. Questa condizione è oggi nota come «condizione di Cauchy», che l'aveva enunciata esplicitamente (ma senza darne una dimostrazione) in relazione alle somme parziali delle serie e che se ne era servito a più riprese per dimostrare che una serie data era convergente.

Tali successioni vengono chiamate «fondamentali» da Cantor. Seguendo Cauchy, egli sostiene inizialmente che se una successione soddisfa tale condizione allora «ha un limite determinato a», ma subito dopo, correggendo l'ambiguità di questa espressione, afferma che alla successione è «associato» il numero a, identificando così i numeri reali con le successioni fondamentali. Due di tali successioni, a_n e b_n, sono lo stesso numero reale se $|a_n - b_n|$ tende a zero.

Se dato un qualsiasi numero razionale $\varepsilon > 0$ i membri della successione, per n abbastanza grande, sono tutti minori in valore assoluto di ε allora $a = 0$; se sono tutti maggiori di qualche razionale positivo allora $a > 0$; se sono tutti minori di qualche razionale negativo allora $a < 0$.

Le operazioni fondamentali vengono estese al nuovo sistema osservando che se $a = a_n$ e $b = b_n$ sono due successioni fondamentali, anche $a_n + b_n$ e $a_n \times b_n$ lo sono e definiscono i numeri $a + b$ e ab.



Georg Cantor (1845-1918)

Infine, se b_n è una successione fondamentale di numeri reali (razionali o irrazionali) allora esiste un unico numero reale a determinato da una successione di razionali a_n tale che b_n tende ad a; cioè la formazione di successioni fondamentali di numeri reali non crea la necessità di nuovi tipi di numeri. In altre parole i numeri reali costituiscono un sistema completo.

Costruzioni del tutto simili a quella di Cantor vennero proposte nello stesso anno da Charles Meray nel suo *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* (*Nuovo riassunto di analisi infinitesimale*) e da Edward Heine nell'articolo *Die Elemente der Functionenlehre* (*Elementi della teoria delle funzioni*).

Augustin Louis Cauchy

Cours d'Analyse

Secondo i principi sin qui stabiliti, perché una serie sia convergente è necessario e sufficiente che per valori infinitamente grandi di n le somme s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ... differiscano dal limite s, e di conseguenza tra loro, di quantità infinitamente piccole. D'altra parte le differenze successive tra la prima somma s_n e ognuna di quelle che seguono sono determinate dalle equazioni

$$s_{n+1}-s_n=u_n,$$
$$s_{n+2}-s_n= u_n+u_{n+1},$$
$$s_{n+3}-s_n= u_n+u_{n+1}+u_{n+2},$$

Dunque, affinché la serie sia convergente, [...] è necessario che la somma delle quantità $u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ prese a partire dalla prima in un numero qualsiasi, finiscano per ottenere costantemente dei valori assoluti minori di qualsiasi valore assegnato. Reciprocamente, se queste condizioni sono soddisfatte, la convergenza della serie è assicurata.

Edward Heine

Die Elemente der Functionenlehre

Sui numeri

1. Le serie numeriche

1. Definizione. Chiamo serie numerica una serie di numeri a_1, a_2, ..., a_n, ... se per ogni numero dato η diverso da zero, sufficientemente piccolo, esiste un valore n tale che $a_n - a_{n+\nu}$ per ogni intero positivo ν è minore di η.

Osservazione. La parola numero senza altre aggiunte significa sempre nel capitolo A numero razionale. Lo zero sarà qui considerato un numero razionale.

2. Definizione. Ogni serie numerica in cui i numeri a_n, con indice n crescente, sono minori di una grandezza data, la chiamo serie elementare. [...]

Georg Ferdinand Cantor

Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen

I numeri razionali formano la base per la definizione del successivo concetto di grandezza numerica; dirò che essi formano un dominio A (ed includo in essi lo zero). Quando parlo di grandezza numerica in senso esteso è il caso presentato da una successione infinita di numeri razionali

$$(1)\ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

che hanno la proprietà che la differenza $a_{n+m} - a_n$ diventa infinitamente piccola al crescere di n, qualunque sia m numero intero positivo, o in altre parole che per un ε arbitrario (razionale positivo) esiste un intero n_0 tale che $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, quando $n \geq n_0$ e m è un numero intero arbitrario. Esprimo la proprietà della successione (1) dicendo che la successione (1) ha un limite definito b [...].

Se c'è una seconda successione

$$(1')\ a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

che ha un limite definito b', si trova che le due successioni (1) e (1') possono essere in relazione tra loro in uno dei seguenti tre modi, che sono mutuamente esclusivi: o (i) $a_n - a'_n$ diventa infinitamente piccola al crescere di n, o (ii) $a_n - a'_n$ da un certo n in poi rimane sempre più grande di una quantità positiva (razionale) ε, o (iii) $a_n - a'_n$ da un certo n in poi rimane più piccolo di una certa quantità negativa (razionale) $-\varepsilon$.

Se si verifica la prima condizione pongo $b=b'$, se si verifica la seconda $b>b'$, se si verifica la terza $b<b'$.

CHARLES MERAY

Nouveau précis d'analyse infinitésimale

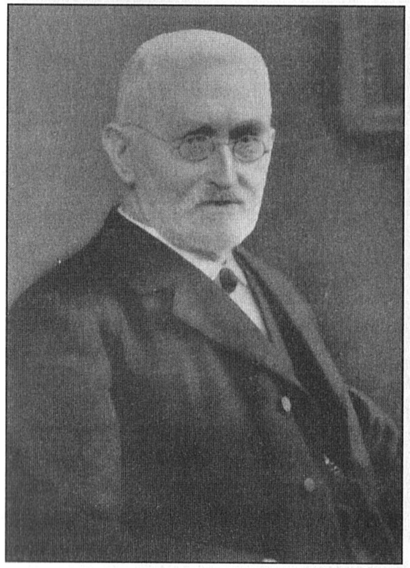
1. Diremo variante un numero variabile (intero o frazionario, positivo o negativo), $v_{m,n,\ldots}$ il cui valore dipende dai numeri interi m, n, ... che assumano tutte le combinazioni di valori possibili e che chiameremo suoi indici. [...]

2. Se esiste un numero V tale che si possa prendere m, n, ... abbastanza grande affinché la differenza $V - v_{m,n,\ldots}$ sia, in valore assoluto, inferiore a una quantità così piccola come si voglia, per certi valori degli indici e per tutti i valori più grandi, si dice che la variante $v_{m,n,\ldots}$ tende o converge verso il limite V.

Quando $V=0$, la variante $v_{m,n,\ldots}$ si dice una quantità infinitamente piccola; tale è ad esempio la differenza tra una variante e il suo limite. [...]

7. 2. *I reali di Dedekind*

Sempre nel 1872 Richard Dedekind diede alle stampe l'opuscolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuità e numeri irrazionali*) in cui presentava una diversa definizione del continuo dei numeri reali. Se Cantor –e con lui Heine e Meray– era partito dalle successioni di Cauchy, identificandole con i numeri reali, in altre parole aveva tramutato l'assunto non dimostrato di Cauchy in una definizione grazie alla quale esso diventava ovvio per le successioni razionali e facile per quelle di numeri reali, la formulazione di Dedekind ricorda invece la teoria delle proporzioni classica e i suoi sviluppi seicenteschi. Dedekind prende le mosse dallo studio dei numeri razionali, di cui individua tre proprietà fondamentali:



Richard Dedekind (1831-1916)

1. ordinamento: se $a>b$ e $b>c$ allora $a>c$;
2. densità: se $a \neq b$ allora esistono infiniti razionali compresi tra a e b;
3. sezione: se a è un razionale dato, tutti i razionali si ripartiscono in due classi A_1 e A_2 contenenti ognuna infiniti elementi tali che nella prima stanno tutti i numeri minori di a e nella seconda tutti i numeri maggiori di a, mentre a può stare nella prima o nella seconda classe.

Se si fissa un segmento unità di misura – dice Dedekind – si può associare ad ogni razionale un punto su una retta, cosicché i punti di una retta soddisfano analoghe proprietà di ordinamento, densità e sezione. È noto però che non si ha la corrispondenza inversa in quanto esistono sulla retta infiniti punti a cui non corrisponde alcun numero razionale. Se si vuole un sistema numerico che mantenga «la qualità di essere completo, senza lacune, ossia continuo», bisogna allora creare dei nuovi numeri da aggiungere ai razionali, perché questi da soli non bastano a descrivere aritmeticamente tutti i fenomeni sulla retta.

L'«essenza della continuità» è riconosciuta da Dedekind in una proprietà che i punti della retta verificano, e che è l'inverso la proprietà (3). Si tratta di un assioma, noto come «assioma di continuità» o «di Dedekind», che stabilisce che se viene fatta una partizione della retta in due classi in cui ogni elemento di una classe sta a sinistra di ogni elemento dell'altra allora esiste uno e un solo punto dal quale questa partizione è prodotta. Abbandonando l'intuizione geometrica Dedekind trasferisce al sistema numerico questa proprietà definendo numero reale una sezione di numeri razionali, cioè una coppia (A_1, A_2) di sottoinsiemi non vuoti e disgiunti la cui unione sia l'insieme dei razionali e tali che per ogni elemento a di A_1 e b di A_2 risulti $a<b$. Alcune di queste sezioni sono prodotte da un numero razionale, come avviene ad esempio quando A_1 è l'insieme di tutti i numeri razionali minori di 2 e A_2 è costituita da 2 e dai numeri maggiori di 2. In questo caso, la sezione (A_1, A_2) definisce il numero razionale 2. In altri casi invece non c'è nessun numero razionale che separi le due classi A_1 e A_2, come avviene se in A_2 si mettono tutti i numeri positivi che elevati al quadrato sono maggiori di 2, e in A_1 quelli che restano, cioè i numeri negativi, lo 0 e i numeri positivi che elevati al quadrato sono minori di 2. Questa sezione definisce (o meglio, è) il numero irrazionale $\sqrt{2}$.

In generale, le sezioni che non sono prodotte da nessun numero razionale 'creano' un nuovo numero, un numero irrazionale. In questo modo ad ogni sezione corrisponde ora, in analogia con la retta, uno ed un solo numero determinato, razionale o irrazionale.

A partire dalle sezioni si verifica poi che i numeri così costruiti godono delle usuali proprietà definendo opportunamente l'ordinamento e le operazioni aritmetiche.

A differenza della definizione di Cantor, Heine e Meray, che si basava sulle successioni di Cauchy e quindi poteva essere introdotta solo ad uno stadio piuttosto avanzato dell'analisi, quella di Dedekind è una teoria 'elementare', nel senso che essa richiede solo la conoscenza del sistema dei numeri razionali e di alcuni rudimenti di teoria degli insiemi. Per questo motivo, la teoria dei numeri reali che si trova usualmente esposta nei libri di analisi è quella dovuta a Dedekind, al punto che in alcuni casi si tende a identificare il concetto di numero reale con quello di sezione di Dedekind. Ciò non significa che l'altra teoria sia ormai da relegare tra le curiosità storiche; al contrario il metodo di «completamento» di Cantor-Heine-Meray è essenziale nell'analisi moderna, in particolare nella teoria degli spazi a infinite dimensioni.

Richard Dedekind

Stetigkeit und irrationale Zahlen

IV. Le ultime parole illuminano chiaramente la via per la quale si può giungere a un campo continuo ampliando il campo discontinuo R dei numeri razionali Nel paragrafo I abbiamo rilevato che ogni numero razionale a determina una ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 di tale natura che ogni numero a_1 della prima classe A_1 è minore di ogni numero a_2 della seconda classe; il numero a stesso è o il numero massimo della prima classe o il numero minimo della seconda. Ora, noi chiameremo sezione e indicheremo col simbolo (A_1, A_2) ogni ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 che goda soltanto di questa proprietà caratteristica che ogni numero della classe A_1 sia minore di ogni numero della classe A_2.

Possiamo dire allora che ogni numero razionale a determina una sezione o piuttosto due sezioni, le quali però noi non considereremo come essenzialmente distinte. Questa sezione gode inoltre della proprietà ulteriore che o tra i numeri della prima classe esiste un numero massimo o tra i numeri della seconda classe esiste un minimo. E inversamente, se una sezione gode di quest'ultima proprietà allora essa è prodotta da questo numero razionale massimo o minimo.

Ma è facile provare l'esistenza di infinite sezioni non prodotte da nessun numero razionale. L'esempio più semplice è il seguente.

Sia D un numero intero positivo che non sia però il quadrato di un numero intero. Se si accolgono nella seconda classe A_2 tutti i numeri positivi razionali a_2 il cui quadrato sia $> D$, e nella prima classe si accolgono tutti i numeri razionali rimanenti, allora questa ripartizione costituisce una sezione [...] Però questa sezione non è prodotta da nessun numero razionale.

Per la dimostrazione si deve anzitutto mostrare che non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia $=D$. [...] Di conseguenza, il quadrato di ogni numero razionale x è o $<D$ o $>D$. Da qui segue facilmente che non vi è nella classe A_1 un numero massimo, né nella classe A_2 un numero minimo. E infatti, ponendo

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}$$

si avrà

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

e inoltre

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Se x indica un numero positivo della classe A_1, allora si ha $x^2<D$ e quindi $y>x$ e $y^2<D$, cioè anche y appartiene alla classe A_1. Se invece x è un numero della classe A_2, allora si ha $x^2>D$, onde si deduce $y<x$, $y>0$ e $y^2>D$, e quindi anche y appartiene alla classe A_2. Ne risulta dimostrato che la sezione considerata non è prodotta da nessun numero razionale.

7. 3. *L'aritmetizzazione dell'analisi*

Le definizioni di Cantor, Meray e Dedekind avevano ricondotto i numeri reali ai razionali, e dunque in ultima analisi agli interi. Restava da fare allora solo l'ultimo passo, quello di una definizione rigorosa degli interi, per i quali fino alla fine dell'Ottocento non si era andati sostanzialmente al di là della definizione del settimo libro degli *Elementi* di Euclide: «Numero è moltitudine di unità». Anche qui, oltre che esigenze di rigore, quello che rendeva urgente la fondazione dell'aritmetica era la necessità di fondare su basi sicure un metodo di dimostrazione che si stava dimostrando sempre più come uno dei più potenti della matematica: il principio di induzione.

A chi avesse voluto intraprendere questo compito si aprivano due strade: una assiomatica, che consisteva nell'elencare precisamente e completamente gli assiomi che governano i numeri interi; l'altra costruttiva, che cercava la definizione degli interi in un concetto ancora più primitivo, e che cominciava allora ad affacciarsi alla matematica: quello di insieme.

Negli anni tra il 1884 e il 1889 apparvero tre differenti tentativi di una sistemazione rigorosa del concetto di numero naturale. Il primo in ordine di tempo fu quello intrapreso nel 1884 da Gottlob Frege nel suo *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'aritmetica*). Frege basa la sua definizione sul concetto di equipotenza tra insiemi: due insiemi sono equipotenti se tra loro esiste una applicazione biunivoca, cioè se è possibile mettere i loro elementi in corrispondenza uno a uno. Grazie all'equipotenza, gli insiemi (finiti) si dividono in classi, ognuna delle quali è costituita da insiemi tutti equipotenti tra loro, mentre insiemi appartenenti a classi distinte non sono equipotenti. Il numero è allora definito come il carattere comune degli insiemi di una classe: in questo senso tutti gli insiemi equipotenti corrisponderanno allo stesso numero.

Sempre sulla teoria degli insiemi ha le sue radici la teoria esposta da Richard Dedekind nel suo *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Essenza e significato dei numeri*) pubblicato per la prima volta nel 1888. Più di Frege, le cui esigenze erano soprattutto quelle di una chiarificazione logica del concetto di numero, Dedekind è attento alle implicazioni matematiche della sua formulazione:

> I punti fondamentali sono: la netta distinzione del finito dall'infinito, la nozione del numero di oggetti, la dimostrazione della validità logica del metodo d'induzione completa ovvero dell'argomentazione ricorrente da n a $n+1$, e anche la dimostrazione che la definizione induttiva (ovvero per ricorrenza) è scevra da ogni contraddizione.

Dedekind parte dalla definizione di insieme infinito: un insieme S è infinito se si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Benché già Galileo avesse osservato come fosse possibile mettere in corrispondenza biunivoca i numeri interi con i numeri pari, o anche con i quadrati, è questa la prima volta che una tale proprietà è assunta come definizione degli insiemi infiniti, che paradossalmente risultano più facili da definire che non gli insiemi finiti:

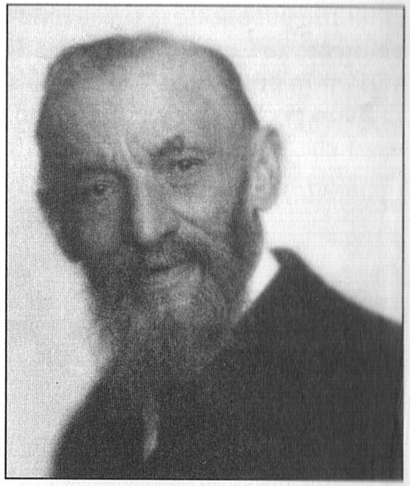
> Sotto questa forma la definizione dell'infinito, che costituisce il punto fondamentale di tutta la mia ricerca, è stata da me comunicata nel settembre 1882 al sig. G. Cantor e ancora molti anni prima ai signori Schwarz e Weber. Tutti gli altri tentativi a me noti di distinguere l'infinito dal finito mi sembrano così poco felici che io credo di poterne lasciar da parte la critica.

Proprio questa corrispondenza φ con una sua parte propria, che caratterizza un insieme infinito S, è la chiave di volta per la individuare in S un sottoinsieme con le proprietà degli interi. Poiché φ è una corrispondenza tra S e una sua parte, c'è un elemento di S, che Dedekind chiama 1, che non appartiene a $\varphi(S)$. Dedekind chiama inoltre *catena* un insieme K tale che $\varphi(K) \subset K$, e considera la più piccola catena che contiene 1, facendo vedere che in questo insieme valgono tutte le proprietà dei numeri naturali, ivi compreso il principio di induzione.

Infine nel 1889 Giuseppe Peano pubblicò il suo *Arithmetices Principia* (*I principî dell'aritmetica*), nel quale dava una definizione assiomatica del sistema degli interi, senza alcun riferimento alla teoria degli insiemi. Il punto

di partenza di Peano è la nozione di successore, la cui somiglianza con la corrispondenza φ di Dedekind è evidente. A fondamento del sistema dei numeri naturali, Peano elencava cinque assiomi:

1. 1 è un numero,
2. Il successore di un numero è un numero,
3. 1 non è successore di nessun numero,
4. Due numeri che hanno successori uguali sono uguali,
5. Se un insieme A di numeri contiene il numero 1 e il successore di ogni suo elemento, allora A è l'insieme di tutti i numeri.



Giuseppe Peano (1858-1932)

In un certo senso gli assiomi di Peano sono il distillato assiomatico della formulazione di Dedekind. In particolare, dai primi quattro assiomi segue che la corrispondenza «successore di» gioca il ruolo della φ di Dedekind: essa è infatti una corrispondenza biunivoca (assiomi 2 e 4) tra l'insieme dei numeri naturali e una sua parte propria (a causa dell'assioma 3). Inoltre l'assioma 5 garantisce che il sistema dei numeri naturali è la minima catena che contiene l'unità 1.

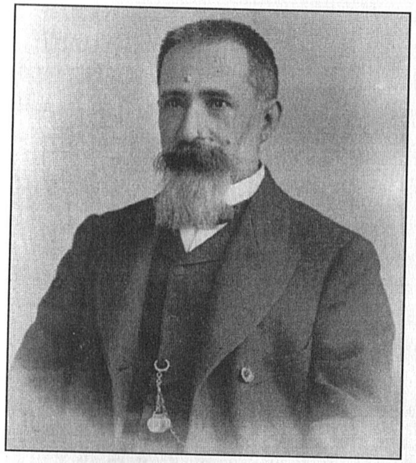
Quest'ultimo assioma è equivalente al cosiddetto «principio di induzione»:

> Se una proprietà vale per 1 e se, supposta valida per un numero, vale anche per il suo successore, allora vale per tutti i numeri.

Basta infatti applicarlo all'insieme A dei numeri per cui la proprietà è valida.

7. 4. *La trattatistica dell'analisi in Italia*

Le esigenze di rigore espresse soprattutto da Weierstrass e dalla sua scuola, trovarono un'eco importante in Italia, dove nella seconda metà dell'Ottocento vi fu una vigorosa ripresa della matematica, con l'emergere di importanti centri tra cui spiccavano Pisa e Torino. Tra i trattati originali di analisi, tutti basati su una definizione rigorosa dei numeri reali e delle operazioni del calcolo infinitesimale, meritano una particolare menzione i *Fondamenti per la teorica delle funzioni delle variabili reali* (1878) di Ulisse Dini, e il *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* di Angelo Genocchi (1884) , quest'ultimo pubblicato con una serie di aggiunte di Giuseppe Peano, all'epoca assistente di Genocchi a Torino. Le aggiunte di Peano, che correggevano vari errori presenti in testi di analisi in Italia e in Europa, non vennero viste di buon occhio da Genocchi, che prese pubblicamente le distanze da un testo che portava il suo nome. I testi di Dini e di Genocchi-Peano restarono per molto tempo un modello di rigore e furono anche tradotti in tedesco, a testimonianza del livello degli studi di analisi in Italia.



Ulisse Dini (1845-1918)

Oltre a costituire una sistemazione dell'analisi sulla base delle ultime ricerche, questi testi contengono anche importanti risultati originali. In un paragrafo aggiunto quando i *Fondamenti per la teorica delle funzioni delle variabili reali* era già pronta per le stampe, Dini inserì tra l'altro nuove osservazioni sulle derivate di una funzione. Egli introduce il rapporto incrementale destro e sinistro e i relativi limiti superiore ed inferiore, definendo quelle che sono rimaste note come «derivate del Dini».

Salvatore Pincherle

Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del Prof. C. Weierstrass

Il conseguimento di studi all'estero avendomi permesso di frequentare nell'anno 1877-78 i corsi d'Analisi dell'Università di Berlino, mi credeva quasi in obbligo di far conoscere almeno in parte ai miei compagni di studio le nuove vedute ed i concetti nuovi che il prof. Weierstrass va introducendo nella scienza e che, mentre vanno diffondendosi in Germania per l'opera dei numerosi suoi discepoli, rimangono ancora quasi sconosciuti agli studenti italiani per la nota avversione di quel maestro per la stampa. Solo mi tratteneva da un tentativo di pubblicazione la difficoltà di una conveniente esposizione di argomenti delicati e per la loro novità soggetti a controversia, e in cui una parola impropriamente adoperata basta a svisare il concetto [...]

Ulisse Dini

Fondamenti per la teorica delle funzioni delle variabili reali

Nei punti o negli intervalli nei quali la derivata di una funzione non esiste, o almeno si è incerti intorno alla esistenza di essa, non potendo considerare insieme e talvolta neppure separatamente i limiti del rapporto $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per h tendente a zero per valori positivi e negativi, sarà naturale di prendere ad esaminare direttamente questo rapporto per ogni valore speciale di x fra a e b, o almeno i limiti tra i quali questo rapporto oscilla coll'impicciolire indefinitamente di h, e ciò considerando separatamente quello corrispondente ai valori negativi; e allora si giungerà a risultati assai generali, alcuni dei quali comprendono, come casi particolari, anche molti di quelli che già abbiamo ottenuto. Chiameremo perciò per brevità di linguaggio, rapporto incrementale il rapporto $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; e chiameremo rapporto incrementale destro quello corrispondente ad h positivo, e rapporto incrementale sinistro quello corrispondente ad h negativo [...]

Angelo Genocchi

Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicati con aggiunte dal D.r Giuseppe Peano

Dicesi che col tendere di x verso a, $y=f(x)$ ha per limite A, se fissata una quantità piccola ad arbitrio ε, si può determinare una quantità h tale che per ogni valore di x, che differisca da a meno di h, sia $f(x)–A$ un valore assoluto minore di ε.

Dicesi che col crescere indefinitamente di x, $y=f(x)$ ha per limite A, se fissata una quantità piccola ad arbitrio ε, si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $x>N$ sia $f(x)–A< \varepsilon$ in valore assoluto. [...]

8. L'integrazione e la misura degli insiemi

8. 1. *Integrazione e misura*

La definizione di integrale data da Riemann, che aveva separato il problema dell'integrabilità dalla continuità delle funzioni da integrare, aveva posto contemporaneamente il problema di caratterizzare le funzioni integrabili.

Lo stesso Riemann, come abbiamo visto, aveva legato l'integrabilità di una funzione all'ampiezza delle sue oscillazioni, e quindi in ultima analisi all'insieme dei punti di discontinuità, anche se questo insieme non appare esplicitamente nella sua memoria. Negli anni successivi comparvero una serie di lavori volti allo studio dell'insieme dei punti di discontinuità delle funzioni integrabili, e in particolare alle loro proprietà topologiche.