Aula 9 17.00 martedì 08/03 ISTITUZIONI DI MATEMATICA

Luigi Chierchia → didattica → Istituz.

www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/FIL_15_16/IMF_15_16.htm

Lunedì 13-14 effettive aula 6

Martedì 17-19 effettive aula 9

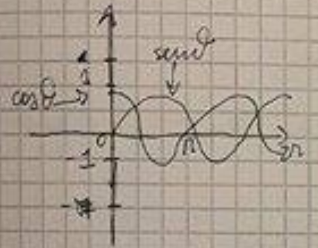
1. Cosa è la matematica?
2. Il "concetto" di infinito (In matematica l'infinito come ente non esiste) ma come "attributo" figura ovunque.
3. Discutere i fondamenti della matematica → Teorema fondamentale del calcolo (Newton-Leibnitz)

Bibliografia:

G. Cantor (1872) NASCITA dei numeri reali $\mathbb{R}$.

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + b_1 \operatorname{sen}\vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + b_2 \operatorname{sen} 2\vartheta \ldots = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\vartheta}$$

(studio delle serie trigonometriche)



prima dimostrazione rigorosa di $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

R. Dedekind "tagli" di Dedekind (1872)

Cantor e Dedekind partendo dai numeri razionali $\mathbb{Q}$ "costruiscono" i numeri reali in modi diversi

· Solomon Feferman, "Cosa c'è di speciale nelle dimostrazioni matematiche"

· Giusti, Piccola storia del calcolo infinitesimale

· Hardy. Wright. An introduction to the theory of numbers.*

· Morris Kline Storia della matematica

· Rudin W., Principi di analisi matematica*

· Alessandro Marx, Tesi magistrale, partire da $\mathbb{N}$ → per costruire $\mathbb{R}$

IV-V sec. a.C. EUCLIDE - approccio assiomatico

definizioni dei numeri (1800) → definizione di $\mathbb{N}$ (1890) PEANO

L'infinito nell'antica Grecia

1. $\nexists$ numeri interi a, b t.c. $\frac{a^2}{b^2} = 2$ $(\Leftrightarrow \sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \ \forall p, q \in \mathbb{Q})$ TEOREMA

L'equazione $a^2 = 2b^2$ non ha soluzioni diverse da $a = 0$ e $b = 0$ nei numeri interi
Irrazionalità di $\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$

Dimostrazione (Aristotele)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}_+, q \in \mathbb{Z}$

Per assurdo:

Supponiamo che $\exists\, a, b \in \mathbb{N}_+$ t.c. $a^2 = 2b^2$ e supponiamo che $M.C.D(a, b) = 1$

(numeri pari $\Leftrightarrow 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$
numeri dispari $\Leftrightarrow 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$)

a^2 è pari $\rightarrow$ anche a è pari
(se m è dispari, m^2 è dispari dim:
$m = 2k+1$ $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 2(2k^2 + 2k) + 1$)

$a = 2k \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$ anche b^2 è pari $\rightarrow b$ è pari
il che contraddice l'assunzione che $M.C.D(a, b) = 1$

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali $= \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$ (positivi)
$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ (interi)
(Zahlen)

Numeri razionali $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}_+, p \in \mathbb{Z}\}$ con espansione decimale finita o periodica.

Teorema (Pitagora - Aristotele)

$\nexists$ soluzione $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $\boxed{a^2 = 2b^2}$ eccetto la soluzione banale $a = b = 0$

$a^2 = 2b^2$ con $a, b \neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

DIM.

Supponiamo (per assurdo) che esistano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che valga

* $\boxed{a^2 = 2b^2}$

e possiamo assumere che $a > 0$, $b > 0$ e che non abbiano fattori comuni (in altri termini $a = d a'$ e $b = d b'$ con $d, a', b' \in \mathbb{N}_+$)

si avrebbe: $\cancel{d}(a')^2 = 2\cancel{d}(b')^2$

* a^2 è pari $\rightarrow$ a è pari (se a fosse dispari, a^2 sarebbe ancora dispari)

$a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = \underline{2(2n^2 + 2n) + 1}$ che è dispari

dunque $a = 2c$ con $c \in \mathbb{N}_+$

$(2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow \cancel{4}c^2 = \cancel{2}b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$

b^2 è pari $\rightarrow$ b è pari dunque a, b avrebbero 2 come fattore comune mentre M.C.D. $(a,b) =$ 1 quindi si ha una contraddizione!

DIM. alternativa:

$$a^2 = 2b^2 \; *$$

Definizioni: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{Z}$

· a divide b $\quad a | b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b = ac \quad \exists\, c \in \mathbb{Z}$ (a divisore di b)

· $p \in \mathbb{N}_+$ ($\mathbb{Z}$) e $p > 1$ si dice numero primo se non ha altri divisori eccetto p, 1.
(1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, ...)

(Per assurdo)
Supponiamo che $\exists$ una soluzione non banale a, b di $*$, $a, b > 0$ M.C.D. $(a,b) = 1$

$a^2 = (2b) \cdot b$ ossia $b | a^2$. Se p è numero primo, divisore di $b \Rightarrow p | a^2 \Rightarrow p | a$
e questo non è possibile. b non potrebbe essere neanche 1.
Se $b = 1 \Rightarrow a^2 = 2$ con a intero positivo, che non ha soluzioni.

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

Se p è primo e $p | ab$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, allora o $p | a$ o $p | b$.

Es. 1 (da: An introduction to theory of numbers)

Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, ($P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ di grado ≥ 2, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{Z}$)
Se $b \in \mathbb{R}$: $P(b) = 0$ allora o b è intero o b è irrazionale. Dimostrare!

OSS. se $n = 1 \Rightarrow P(x) = a_1 x + a_0 \quad P(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbb{Q}$

2) $x^n - 1 = 0$ ha soluzione $x = 1$
$x^2 - 2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$ non ha soluz. intere (irrazionale)
$x^3 - 2 = 0 \quad x^3 = 2 \quad x = \sqrt[3]{2}$ (irrazionale)

TEOREMA I numeri primi sono infiniti. (EUCLIDE)

DIM.

Consideriamo $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_N$: i primi N numeri primi

$p_1 = 2$, $p_2 = 3$

e consideriamo $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$

$\begin{cases} N=2 & a=6 \\ N=3 & a=31 \\ N=4 & a=121 \end{cases}$

$p_i \nmid a$ p_i non divide a $(1 \le i \le N)$

allora ① a è primo $(a > p_N)$

② a non è primo $a = p \cdot q$ anche $(p, q \ge p_N)$

dunque i numeri primi sono infiniti.

$2^{2^n} + 1$

$n=1 \Rightarrow 5$ (Fermat)

$n=0 \Rightarrow 3$ $\quad n=5 \Rightarrow$

$n=2 \Rightarrow 17$

$n=3 \Rightarrow 257$

$2^8 + 1$ $\quad n=4 \Rightarrow 65537$ $\quad 2^{16}+1$ $\quad 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6.700.417$

16	5	6	7	8
4	32	64	128	256

La SERIE GEOMETRICA

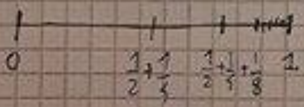
Teorema

Sia $0 < x < 1$ allora $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \dfrac{x}{1-x}$

Un caso speciale. $x = \frac{1}{2}$

$S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ $\quad n=4 \; x=\frac{1}{2}$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$



$x S_n = x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1}$

$S_n - x S_n = x - x^{n+1}$

$S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

$x S_n = x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1}$

$S_n \to \dfrac{x}{1-x}$

$S_n - x S_n = x - x^{n+1}$ $\quad S_n = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x}$ $(1 - x^n)$ $\quad 0 < 1 - x^n < 1$

$\parallel$ $\quad \downarrow$ "$n \to \infty$"

$S_n(1-x)$ $\quad 0$

$$\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} \quad \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{9}\cdot 9 = 1$$

$0,\bar{9} = 1$

↳ espansione decimale

$0,9999$

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}\cdots$$

$$9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}\cdots\right) = 9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

serie geometrica $x+x^2+x^3\ldots = \frac{x}{1-x}$

I numeri reali irrazionali sono i numeri che hanno espansione decimale infinita e aperiodica.

ES. ②

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ è irrazionale

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$$

$x^2 = 5+2\sqrt{6} \qquad x^2-5 = 2\sqrt{6} \qquad (x^2-5)^2 = 24 \qquad x^2(x^2-10)$

$x^4+25-10x^2 = 24 \quad P(x) = x^4+1-10x^2 = 0$

$P(1) = 1+1-10 = -8$

$P(2) = 16-40+1 = -23$

$P(3) = 9-18 = -8$

$P(k) > 0 \quad k \geq 4$