per cui $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ per cui $\zeta(2) = +\infty$

- <u>(Quanto dire)</u> $\zeta(\alpha) < \infty$ se $\alpha > 1$

$$\sum^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right)}^{2^1} + \overbrace{\left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right)}^{2^2} + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\right)}^{2^{n-1}} + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right)}^{2^n}$$

termini

$$1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

sia $x = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \implies 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \to 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$$

(Metodo di <u>Cauchy</u>)

se $\alpha = \frac{3}{2} \implies \zeta\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

<u>Def 1.</u> $I_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

<u>Def 2.</u> Siano A, B insiemi non vuoti, sono in corrispondenza biunivoca o hanno la stessa <u>cardinalità</u> se $\exists\, \varphi : A \to B$ biunivoca ($\mathrm{dom}\,\varphi = A$, $\mathrm{im}(\varphi) = B$ ed è <u>iniettiva</u>) $\implies A \cong B$

<u>suriettiva</u>

$\forall b \in B\ \exists a \in A$ t.c. $\varphi(a) = b$

$\varphi(a) = \varphi(a') \implies a = a'$

$a \neq a' \implies \varphi(a) \neq \varphi(a')$

<u>Oss</u>

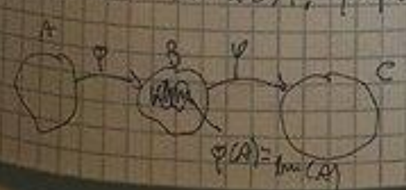
$A \cong B$ è una relazione d'equivalenza:

(i) $A \cong A$ ($\varphi = id$)

(ii) $A \overset{\varphi}{\cong} B \implies B \overset{\varphi^{-1}}{\cong} A$ ($\varphi^{-1} : B \to A$)

(iii) $A \overset{\varphi}{\cong} B$, $B \overset{\psi}{\cong} C \implies A \overset{\psi \circ \varphi}{\cong} C$

$\psi \circ \varphi : A \to C \implies a \in A$, $\psi \circ \varphi(a) = \psi(\varphi(a))$ in generale se $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}\,\psi$



ES.

$\varphi: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ $\qquad \psi\circ\varphi(x) = \sqrt{|x|}$

$\varphi(x) = |x|$ $\qquad \psi\circ\varphi(-7) = \sqrt{7}$

$\psi: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad \psi\circ\varphi(7) \to \sqrt{7}$

$\psi(x) = \sqrt{x}$

Def 3 $A \neq \emptyset$ si dice *finito* se $\exists\, n \in \mathbb{N}: A \cong \mathbb{I}_n$.
$A \neq \emptyset$ si dice *infinito* se non è finito.

esempio $\mathbb{N}$ è infinito. Infatti se $\mathbb{N}$ fosse finito $\exists\, n$: $\mathbb{I}_n \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cong \mathbb{I}_n$.

$\mathbb{N} = \{\varphi(k) \mid k \leq n\}$

Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. $\{\varphi(k) \mid k \leq n\}$ è limitato.
Per $n=1$ $\{\varphi(1)\}$. Assumiamo la tesi per $n \geq 1$.

$\{\varphi(k) \mid k \leq n+1\} = \{\varphi(k) \mid k \leq n\} \cup \{\cancel{\varphi(k)}\ \varphi(n+1)\}$

$\exists\, M: M \geq |\varphi(k)|, \forall k \leq n$ $\quad M' = \max\{M, |\varphi(n+1)|\}$ è un maggiorante per $\{\varphi(k) \mid k \leq n\}$

Seguirebbe che $\mathbb{N}$ è limitato, contraddicendo la proprietà archimedea.

Oss. $\mathbb{N}$, $A := \{n \mid n \geq 2\} \subsetneq \mathbb{N}$ $\quad \varphi: \mathbb{N} \to A$, $n \mapsto n+1$ $\Rightarrow \mathbb{N} \cong A$

Prop. $\emptyset \neq A \subseteq B$. Se B è finito $\Rightarrow$ A è finito.
E se $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ con $b_i \neq b_j$ $\Rightarrow$ $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ con $a_i \neq a_j$ e $m \leq n$, con $m=n$ solo se $A=B$.

Oss. Se A è finito $\Leftrightarrow \mathbb{I}_m \overset{\varphi}{\cong} A$ $\qquad \mathbb{I}_m \cong A$ $\exists\, \varphi(1)$ $\varphi: \mathbb{I}_m \to A$ biunivoca

$a_j = \varphi(j)$ $\quad 1 \leq j \leq m \Rightarrow A = \{a_j \mid 1 \leq j \leq m\} =: \{a_1, \dots, a_j\}$ $\quad a_i \neq a_j$ se $i \neq j$

DIM. Sia $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. $A \subseteq B$
Per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Caso $n=1 \Rightarrow B = \{b\}$ $\quad A \subseteq B \overset{A\neq\emptyset}{\Leftrightarrow} A = \{b\}$ $\quad m = n = 1$.

Caso $n=2 \Rightarrow B = \{b_1, b_2\}$ $A \subseteq B$ i sottoinsiemi non vuoti di B sono $\underbrace{\{b_1\}, \{b_2\}}_{m=1}$, $\underbrace{\{b_1, b_2\}}_{m=n=2}$

Assumiamo la tesi vera per $n \geq 2$ e dimostriamo per $n+1$.
Consideriamo $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$, $b_i \neq b_j$ e $i \neq j$; $\emptyset \neq A \subseteq B$
Se $A=B$ la tesi è vera con $m = n+1$, supponiamo $A \subsetneq B \Leftrightarrow \exists\, 1 \leq r \leq n+1 : b_r \notin A$.

Se $r = 1$, pongo $a'_j = b_{j+1}$, $1 \le j \le m$ $\quad A' := \{a'_1, \dots, a'_m\}$

$A' \{b_2, \dots, b_{m+1}\}$

Se $r = m+1$ $\quad a'_j = b_j$, $1 \le j \le m$ $\quad \{b_1, \dots, b_m\}$

Se $1 < r < m+1$ $\quad a'_j = \begin{cases} b_j & 1 \le j \le r-1 \\ b_{j+1} & r \le j \le m \end{cases}$

$A' \cong \mathbb{F}_m$ $(a'_i \ne a'_j)$ e $A' \dot\cup \{b_r\} = B$ $\qquad$ n.b. $A \dot\cup B = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$

~~Inoltre~~. Se $a \in A \Leftrightarrow a \in B \Leftrightarrow a \ne b_r \Leftrightarrow a = b_j$ con $j \ne r$.

$A' = \{b_j \mid 1 \le j \le m+1, j \ne r\}$

Per ipotesi induttiva A è finito e $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ con $m \le m < m+1$

vale la tesi con $<$.

Oss. Se $A \subseteq B$, se A è finito $\Leftrightarrow \exists! n : \mathbb{F}_n \cong A$. $\qquad$ Dim.

Se $\mathbb{F}_n \cong A \cong \mathbb{F}_m \Leftrightarrow \mathbb{F}_n \cong \mathbb{F}_m$ $\qquad$ se $n \le m \Rightarrow \mathbb{F}_n \le \mathbb{F}_m \Rightarrow n \le m$.

$\mathbb{F}_m = \{n_1, \dots, n_m\}$ $\quad n_i \ne n_j$

Lemma Un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ è limitato. Coroll. $\mathbb{N}$ è non finito.

A è finito $\Rightarrow A \cong \mathbb{F}_n$ per qualche $n \Leftrightarrow A = \{a_1, \dots, a_n\}$ con $a_i \ne a_j$ se $i \ne j$.

Prop. $\emptyset \ne A \subseteq B$, B è finito $\Rightarrow A$ è finito se $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\} \Rightarrow$ $m \le n$ ($m < n$ se $A \subsetneq B$)

Corollario Se A è finito $\Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : A \cong \mathbb{F}_n$

Dim. $A \cong \mathbb{F}_n$ e $A \cong \mathbb{F}_m$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $a_i \ne a_j$ $\qquad A = \{b_1, \dots, b_m\}$ $b_i \ne b_j$

$\left.\begin{array}{l} \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A = \{b_1, \dots, b_m\} \Rightarrow n \le m \\ \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow m \le n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m$

Def Se $A \ne \emptyset$ è finito $\Rightarrow \#A =$ cardinalità di $A =$ l'unico $n \in \mathbb{N} : A \cong \mathbb{F}_n$.

Def. $\#\emptyset = 0$ (e $\emptyset$ è finito)

Se $A \cong \mathbb{N}$ diremo che A è numerabile e se $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $(a_i \ne a_j)$ se $i \ne j$

chiameremo $\{a_j\}$ una numerazione di A. $\qquad \{a_j\}$ iniettiva

TEOREMA A è infinito $\Leftrightarrow$ $\exists$ una successione iniettiva $\{a_j\}$: $\{a_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

Questo teorema usa l'Assioma della scelta.

Se A_i $i \in I \neq \emptyset$, sono insiemi non vuoti $\Rightarrow$ allora $\exists$ una funzione: $\bigcup_{i \in I} A_i \to$

$\varphi: \{A_i \mid i \in I\} \to \bigcup_{i \in I} A_i$

$\varphi(A_i) \in A_i$

DIM. teorema

Lemma. Se A è infinito e $a \in A \Rightarrow A \setminus \{a\}$ è infinito.

dim. Se $A \setminus \{a\}$ fosse finito $\Rightarrow A \setminus \{a\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ $a_{n+1} = a$

dim. teo.

$A \neq \emptyset$, $\exists a \in A$ e $a_1 = a$ $A_1 = A \setminus \{a\}$ A_1 è infinito, $\exists a_2 \in A_1$ e $A_2 := A \setminus \{a_2\}$ e itero

$\Rightarrow \exists \{a_k\}$ è una succ. iniettiva dentro A.

Esempi

1. $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ è numerabile $\{n-1\}_{n \in \mathbb{N}}$

2. $\mathbb{Z}$ è numerabile $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}_0 \cong \mathbb{Z}$ $\begin{cases} a_{2k} = k & k \geq 0 \\ a_{2k+1} = -k & k \geq 1 \end{cases}$

a_5	a_3	a_1	a_0	a_2	a_4	a_6
-3	-2	-1	0	1	2	3

$\{a_k \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{Z}$

Prop. 1 F_i insiemi finiti non vuoti e $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j \Rightarrow \bigcup_{i \in A} F_i$ è numerabile

DIM. Sia $n_i := \# F_i$ $(n_i \in \mathbb{N})$

$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$ $N_1 = n_1$, $N_2 = n_1 + n_2$, $N_k = n_1 + \dots + n_k$

Sia, $\forall i$, $F_i = \{a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}\}$: $a_j^{(i)} \neq a_k^{(i)}$ $\forall j \neq k$

$a_j^{(i)} \neq a_h^{(k)}$ $\forall i \neq k$, $\forall j, h$.

$$a_j = \begin{cases} a_j^{(1)} & 1 \leq j \leq N_1 \\ a^{(2)} & N_1 + 1 \leq j \leq N_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{j-N_n}^{(n+1)} & N_n + 1 \leq j \leq N_{n+1} = N_n + n_{n+1} \end{cases}$$

Prop. 2

se A e B sono numerabili, anche $A \times B$ è numerabile.

DIM. $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Sia $D_n = \{(k,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid k+s = n\}$, $n \geq 2$

$D_2 = \{(1,1)\}$ $\quad D_3 = \{(1,2),(2,1)\}$, $D_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

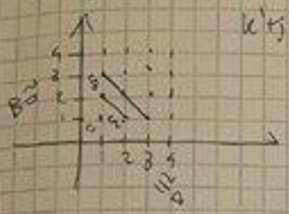
Es. dimostrare che $\#D_n = n-1$.

$$A\times B = \bigcup_{n\geq 2} \overbrace{\{(a_k, b_s) \mid (k,s) \in D_n\}}^{C_n}$$

Es. 12 Dimostrare che $C_n \cap C_m = \emptyset$ se $n \neq m$

$(a_k, b_j) \in D_n \iff k+j = n$

$k'+j' = m$



Prop. $\mathbb{Q}$ è numerabile.

DIM.

(i) $(0,1)\cap\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{N} \text{ e } (p,q)=1 \text{ e } p<q\right\}$.

$D_q := \left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{N},\ (p,q)=1 \text{ e } p<q\right\}$ $\quad D_6 := \left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$ $\quad \#D_q \leq q-1$

$D_7 := \left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ $\quad \#D_7 = 6$

$$(0,1)\cap\mathbb{Q} = \bigcup_{q\geq 2} D_q$$

$(0,1)\cap\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ $\qquad [0,1)\cap\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}_0 \cong \mathbb{N}$

$$(0,1)\cap\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$$
$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$$

$r \in \mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} ([r], \{r\}) \in \mathbb{Z}\times([0,1)\cap\mathbb{Q})$ $\quad \varphi$ è biunivoca $\qquad r = [r] + \{r\}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

Prop. 5 $\mathbb{R}$ non è numerabile.

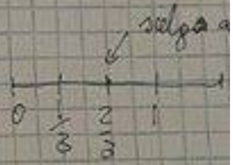
DIM.

Per assurdo, supponiamo che $\mathbb{R}$ sia numerabile. $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{R}\cap[0,1]}_{\text{insieme infinito}}$ sarebbe numerabile

perché sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ numerabile.

$[0,1] = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\quad a_k \neq a_h$ se $k \neq h$.

$[0,1] = \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{I_1 \ni a_1} \cup \underbrace{\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]}_{I_2 \ni a_1} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{I_3 \ni a_1}$, posso trovare $\underbrace{I_1}_{I} \not\ni a_1$



$I_1^1 \not\ni a_1 \qquad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{3}$

divido in tre intervalli lunghi uguali I_1^2, I_2^2, I_3^2 di lunghezza $\frac{1}{3^2}$

Sicuramente $\exists I_i^2 = I^2 : a_2 \notin I^2$

Itero e trovo intervalli $I^k := [\alpha_k, \beta_k] : a_k \notin I^k$

$\beta_k - \alpha_k = \frac{1}{3^k}$ e $I^{k+1} \subsetneq I^k$

$\alpha_k \le \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} \le \beta_k < \dots < \beta_1$

Quindi α_k è crescente e limitata e β_k è decrescente e limitata

$\Rightarrow \alpha_k \to \alpha$ e $\beta_k \to \beta$

Quindi $\beta = \lim \beta_k = \lim (\beta_k - \alpha_k) + \alpha_k = \lim \left(\frac{1}{3^k} + \alpha_k\right) = \alpha \in \mathbb{R} \in \underline{[0,1]}$

$\alpha \in [\alpha_k, \beta_k] \ \forall k \qquad \alpha_k \le \alpha = \beta \le \beta_k \qquad \alpha \ne \alpha_k \ \forall k \qquad 0 \le \alpha_k \le \beta_k < 1$

contraddizione.

(Prop. 6)

<u>Parentesi</u>

segue da

A è infinito $\Leftrightarrow \exists B \subsetneq A : B \cong A$.

A finito $\Rightarrow$ A non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $B \subsetneq A$.

<u>DIM</u>

Se A è infinito, $\overset{\text{Teor.}}{\Rightarrow} \exists \{a_k\}$ una succ. iniett. : $\overbrace{\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}}^{S} \subseteq A$.

~~Sia $\varphi(a) = \{ a$ se $a \in A \setminus S$~~

$B = A \setminus S_{pari} \qquad S_{pari} := \{a_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B \subsetneq A$

$\cancel{\varphi(a)} := \begin{cases} \varphi(a) & \text{se } a \in A \setminus S_{pari} \\ a_k & \text{se } a = a_{2k} \text{ per qualche } k \Rightarrow a \in S_{pari} \end{cases}$

non considerare

$\varphi(a_k) = a_{k+1} \qquad \underbrace{\{a_k \mid k \ge 1\}}_{S} \cong \underbrace{\{a_k \mid k \ge 2\}}_{S'}$

$S' := S \setminus \{a_1\}$

$\varphi(a) = \begin{cases} a & \text{se } a \notin S \\ a_{k+1} & \text{se } a = a_k \text{ per qualche } k \end{cases} \qquad A \overset{\varphi}{\cong} A \setminus \{a_1\}$

Se A e B sono insiemi non vuoti, si denota $A^B := \{ f : B \to A \}$

Se $A = \{1\}$, $A^B = \{f\}$ dove $B \to 1$ $f(b) \equiv 1$

$A = \{0, 1\}$ $f : B \to \{0, 1\}$ $B' := \{ b \mid f(b) = 1 \}$ $B \setminus B' := \{ b \mid f(b) = 0 \}$

Viceversa. dato $B' \subseteq B \to \chi_{B'} : \begin{cases} \chi_{B'}(b) = 1 & \text{se } b \in B' \\ \chi_{B'}(b) = 0 & \text{se } b \notin B' \end{cases}$

Ad ogni funzione $f \in \{0, 1\}^B \mapsto B' \in P(B) =$ tutti i sottoinsiemi di B
e viceversa ad ogni $B' \in P(B) \mapsto \chi_{B'} \in \{0, 1\}$

<u>ES. 73</u> $\# \{0, 1\}^{\mathbb{F}_n} = 2^n$ Per induzione.

<u>Teorema</u>

$\# \mathbb{R} \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

gia.manzi@stud.uniroma3.it