"Def" (notazioni)

Un <u>insieme</u> A è una <u>collezione</u> di elementi. Scriveremo:

$a \in A$ "a appartiene ad A o a è <u>elemento</u> di A"

$a \notin A$ "a non appartiene ad A o non è elemento di A"

Dati due insiemi A e B:

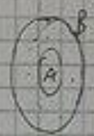
a) $A \cap B = \{ a \mid a \in A,\ a \in B \}$ (intersezione)

b) $A \cup B = \{ a \mid a \in A \text{ o } a \in B \}$ (unione)

c) $A \setminus B = \{ a \mid a \in A \text{ e } a \notin B \}$ (A meno B)

d) $A \subseteq B \Leftrightarrow$ A è sottoinsieme di B $\Rightarrow$ [se $a \in A$, allora $a \in B$]

anche "⊂"



e) $A \subsetneq B \Leftrightarrow$ A è sottoinsieme <u>proprio</u> di B. $A \subseteq B$ e $A \neq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ed $\exists\, b \in B$ t.c. $b \notin A$

f) $\emptyset$ = insieme $\boxed{\text{vuoto}}$:= insieme privo di elementi; è vero che $\emptyset \subseteq A$ per qualunque insieme A.

Se A e B non hanno elementi comuni $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ $\quad \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{P} = \{ 2k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ (numeri pari)

$\mathbb{D} = \{ 2k+1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$ $\quad \mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \emptyset$ $\quad \mathbb{P} \cup \mathbb{D} = \mathbb{Z}$

(numeri dispari)

Def. $A, B, C \subseteq X$

$X \setminus A = A^c$ = complementare di A (in X) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} a \in X,\ a \notin A$

<u>Proposizione</u> $A, B, C, \ldots$ insiemi, sottoinsiemi di X.

(i) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

<u>DIM</u>.

(i) $a \in A \cap (B \cup C) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \in A,\ a \in B \cup C \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \in A$, e ($a \in B$ oppure $a \in C$)

$\Leftrightarrow a \in A \cap B$ oppure $a \in A \cap C \Leftrightarrow a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

DIM.

(II) $a \in (A \cup B)^c \iff a \in X$ e $a \notin A \cup B \iff a \in X,\ a \notin A,\ a \notin B \iff a \in A^c \cap$

dim.

(III) $a \in (A \cap B)^c \iff a \in X$ e $a \notin A \cap B \iff a \in X,\ a \notin A$ oppure $a \notin B \Rightarrow a \in A^c \cup$

Def.

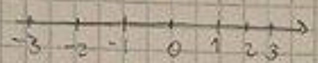
Dati due insiemi A, B

$A \times B$ = A prodotto cartesiano con B $:= \{ (a,b) \mid a \in A,\ a \in B \}$

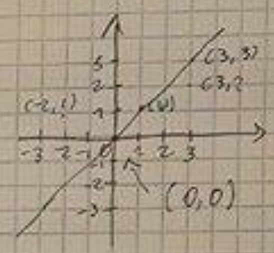
coppie ordinate

In generale $(a,b) \neq (b,a)$ a meno che $a = b$

$\mathbb{Z}$ sulla retta



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



$A = \{a, b\}$ $\quad B = \{x, y, z\}$

$A \times B = \{ (a,x), (a,y), (a,z), (b,x), (b,y), (b,z) \}$

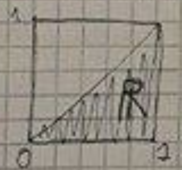
$B \cap A \neq \emptyset$

$A \cup B = \{a, b, x, y, z\}$

Def.

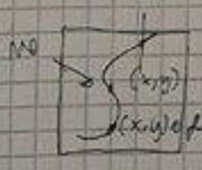
1) Una relazione da A in B è un (non vuoto) sottoinsieme $R \subseteq A \times B$.

2) Una funzione f è una relazione da A in B tale che se $(x,y) \in f,\ (x,z) \in f \Rightarrow y = z$



$A = B = [0,1]$

$R = \{ (x,y) \mid y \leq x \}$ la relazione minore-uguale appartiene alla (triangolo) parte sotto la diagonale del quadrato.



$A = \{ x \mid \text{vale } P(x) \}$

notazione della specifica di un insieme

3) Data una funzione f da A in B, $D_f :=$ dominio di f $= \{ x \in A \mid \exists y : (x,y) \in f \}$

L'immagine (o range) di f, $R_f := \{ x \in B \mid \exists x : (x,y) \in f \}$

OSS

Se f è una funzione, $x \in D_f \implies \exists! y \in R_f \subseteq B : (x,y) \in f$

Notazione standard: $y = f(x)$

Definizione ASSIOMATICA dei numeri reali

$\exists$ un insieme $\mathbb{R}$ ("numeri reali") con due operazioni binarie $(+, \cdot)$ e una relazione d'ordine $(\leq)$

["op. binaria" :$\Leftrightarrow$ una funzione $\underset{\substack{\uparrow \\ (D_f = A)}}{\text{su}}$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$]

[$R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \in R$ scriveremo $x \leq y$] t.c. valgono:

ASSIOMI PER LA SOMMA

(S_1) $\forall x, y$ si ha che $x + y = y + x$ (PROP. commutativa)

(S_2) $\forall x, y, z$ si ha che $(x+y)+z = x + (y+z)$ (PROP associativa)

(S_3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $x + 0 = x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ (esistenza dell'elemento neutro)

(S_4) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $x + y = 0$ (elemento opposto)

ASSIOMI per il prodotto

(P_1) $\forall x, y$: $x \cdot y = y \cdot x$ (commutatività)

(P_2) $\forall x, y, z$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associatività)

(P_3) $\exists\, 1 \neq 0$: $x \cdot 1 = x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro)

(P_4) $\forall x \neq 0$ $\exists y \in \mathbb{R}$ t.c. $xy = 1$ (opposto)

Un insieme F che verifica queste proprietà $(S_1 - S_4)$ $(P_1 - P_4)$ e $S(P)$ si chiama CAMPO

(SP) $\forall x, y, z$ $\quad x \cdot (y+z) = xy + xz$ (prop. distributiva)

ASSIOMI per l'ORDINE

(O_1) $x \leq x$ $\quad \forall x$ (prop riflessiva)

(O_2) $x \leq y$, $y \leq x \implies x = y$ (prop. antisimmetrica)

(O_3) $x \leq y$, $y \leq z \implies x \leq z$ (prop. transitiva)

(O_4) $\forall x, y$ $\quad x \leq y$ oppure $y \leq x$ (relazione TOTALE)

Ordine e somma:

(SO) $x \le y \Rightarrow x+z \le y+z \quad \forall z$ (invarianza per traslazione)

Ordine e prodotto:

(PO) $0 \le x,\ 0 \le y \Rightarrow 0 \le x \cdot y$ (il prodotto di due numeri positivi è positivo)

Manca l'ultimo assioma fondamentale (di completezza).

<u>OSS.</u>

(i) $x \ge y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \le x$

(ii) $x < y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \le y,\ x \ne y$ (iii) $y > x \overset{def}{\Longleftrightarrow} x < y$

(iv) se ammettiamo $1=0$, $\{0\}$ soddisfa tutti i 15 assiomi.

es. (S_4) $0 \quad \exists 0,\ 0+0=0$ $\quad (P_4)$ soddisfatto

(v) esempio in cui valgono $(S_1)-(S_4)$, $(P_1)-(P_4)$, (SP), ma in cui non è possibile introdurre una relazione d'ordine, anche parziale, che soddisfi $(O_1)-(O_4)$ e (SO).

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$	$0+1=1$	$0 \cdot 1 = 0$
$\mathbb{Z}$ modulo 2	$0+0=0$	$1 \cdot 1 = 1$
$0=2$	$1+1=0$	$0 \cdot 0 = 0$

<u>ES. 2</u>

Verificare che $\mathbb{Z}_2$ soddisfa gli assiomi, che è un CAMPO FINITO.

<u>Proposizione 1</u>

(i) $x+y=0,\ x+z=0 \Rightarrow y=z$ (unicità dell'opposto)

(ii) se $x \cdot y = 1$ e $x \cdot z = 1 \Rightarrow y = z$ (unicità del reciproco)

<u>DIM.</u>

(i) $y \overset{(S_3)}{=} y+0 \overset{ipotesi}{=} y+(x+z) \overset{(S_2)}{=} (y+x)+z \overset{(S_1)}{=} (x+y)+z \overset{ip.}{=} 0+z \overset{(S_1)}{=} z+0 \overset{(S_3)}{=} z$

(ii) $y = y \cdot 1 \Rightarrow y \cdot (x \cdot z) \Rightarrow (y \cdot x) \cdot z \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z \Rightarrow 1 \cdot z \Rightarrow z \cdot 1 \Rightarrow z$.

Quindi $\forall x \quad \exists y!: \ x+y=0$ tale che $\boxed{y=-x}$

convenzione

$\forall x \ne 0 \quad \exists! y : x \cdot y = 1$ tale che y si denota con x^{-1} oppure $\frac{1}{x}$.

(Notazione) Def. $x+(-y) := x-y$; $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y} = y^{-1} \cdot x$ (x/y)

$2 := 1+1$ ma $2 \neq 0$?

Proposizione 2

(i) $x+y=x \implies y=0$ (legge di cancellazione per la somma)

(ii) $x \cdot y = x \implies y=1$ $\forall x \neq 0$ (cancell. per il prodotto)

(iii) $x \cdot 0 = 0$ $\forall x$ (annullamento)

(iv) $(-1)\cdot x = -x$

vere in ogni campo (anche $\mathbb{Z}_2$)

(v) $x \geq 0 \implies -x \leq 0$ e $x \leq 0 \implies -x \geq 0$

(vi) $-(-x) = x$

(vii) $x^2 := x \cdot x \geq 0$, $\forall x$

(viii) $\boxed{1>0}$

DIM

(i) $y = y+0 = y+(x-x) = (y+x)-x = (x+y)-x = x-x = 0$

(ii) simile. $y = y \cdot 1 = y \cdot (x x^{-1}) \ldots$ dimostra

(iii) $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x\cdot 0 + x \cdot 0 \implies x \cdot 0 = 0$

(iv) $x + (-1)\cdot x = 1 \cdot x + (-1)\cdot x = (1+(-1))x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \implies (-1)\cdot x = -x$

(v) $x \geq 0 \overset{(S)}{\implies} x+(-x) \geq 0+(-x) \implies 0 \geq -x$

analog. $x \leq 0$ o $0 \geq x \to -x \geq 0$

(vi) $(-x)+x = x-x = 0 \implies x = -(-x)$

(vii) Se $x \geq 0$, segue da (PO)

se $x \leq 0$, $x \cdot x = (-(-x))\cdot x = ((-1)(-x))\cdot x = (-x)((-1)\cdot(x)) = (-x)\cdot(-x) \overset{(v)(PO)}{\geq} 0$

Per (O4) segue la tesi.

(viii) $1>0$

$\underset{(P_3)}{1} = 1 \cdot 1 \underset{(vii)}{\geq} 0$

$1 > 0$ $\quad 2 := 1+1$

$2 \geq 1$ $\quad 1+1 \geq 0+1 = 1 \implies 2 \geq 1$ e se $2=1$

$1+1 = 2 \implies 1=0$ assurdo