Se $A \neq \emptyset$ ed è limitato superiormente, $\mathcal{M} = \{ M \in \mathbb{R} \mid$ maggioranti di $A \}$ ha un MINIMO, ossia un elemento s (ossia $s \le M,\ \forall M \in \mathcal{M}$).

Il più piccolo dei maggioranti di A è l'estremo superiore.

Abbiamo definito 'maggiorante' di un insieme non vuoto, estremo superiore.

Prop.

(i) Se $A \neq \emptyset$ è limitato superiormente, l'estremo superiore è UNICO.

(ii) (caratterizzazione dell'estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, allora s è l'estremo superiore di $A \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ t < s,\ \exists x \in A$ t.c. $x > t$

(Esempio)

$A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, $\neq \emptyset$ è limitato superiormente, $1 \ge 0$ $s = 0$ è il massimo di A

$\frac{1}{2} := 2^{-1}$

$s \in A$, se M è magg. di $A \Leftrightarrow M \ge 0$

Altro esempio.

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1 \}$ $0 \in A$, $\neq \emptyset$ $\sup A :=$ l'estremo superiore di A, $1 \notin A$

e A è limitato superiormente (1 è maggiorante)

$\sup A = 1$ $s = \sup A$

se non fosse 1, $s < 1$, $0 \le s$

Ma $\frac{s+1}{2} := (s+1) \cdot 2^{-1}$ $(s+1) \cdot 2^{-1}$

$s < \underset{\in A}{\frac{s+1}{2}} < 1$

assurdo!

Se $0 \le s < 1 \Rightarrow \boxed{s < \frac{s+1}{2} < 1}$

media aritmetica tra s e 1

$(a+b) \cdot 2^{-1}$

"a, b" $:= \frac{a+b}{2}$, $b > a$

a) $s \neq \frac{s+1}{2}$, b) $\frac{s+1}{2} \neq 1$, c) $s \le \frac{s+1}{2}$, d) $1 \ge \frac{s+1}{2}$

dim. a)

per assurdo:

se $s = \frac{s+1}{2} \Rightarrow 2s = s + 1 \Rightarrow (1+1)s = s + 1$

$(a = b \Rightarrow ac = bc$ segue dalla prop. 2 (ii)

$s + s = s + 1 \Rightarrow s = 1$ ma $s \neq 1$ contraddizione!

dim. b)

$\frac{s+1}{2} = 1 \Rightarrow s + 1 = 2 \Rightarrow s + 1 = 1 + 1 \Rightarrow s = 1$ contr.

dim. c)

$s \le \frac{s+1}{2} \Leftrightarrow 2s \le s + 1 \Rightarrow s + s \le s + 1 \Rightarrow s \le 1$ contr.

dim. γ)

$$\frac{s+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow s+1 \leq 2 \Rightarrow s+1 \leq 1+1 \Rightarrow s \leq 1 \text{ contr.}$$

OSS.

abbiamo usato $x+y \geq x+z \Rightarrow y \geq z$

infatti da (S0) $x+y \geq x+z \Rightarrow x+y-x \geq x+z-x \Rightarrow x-x+y \geq x-x+z \Rightarrow \boxed{y \geq z}$

OSS.

$2>1 \Rightarrow 2^{-1}$ è compreso fra 0 e 1: $0<\frac{1}{2}<1$

infatti $0<1<2$ $\quad 0 \cdot 2^{-1} < 1 \cdot 2^{-1} < 2 \cdot 2^{-1} \Leftrightarrow 0 < 2^{-1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1$

prop. (ES.)

(1) $x>0 \Rightarrow x^{-1}>0$, $\quad x<0 \Rightarrow x^{-1}<0$

(2) $x \leq 0 \leq y \Rightarrow xy \leq 0$ $\quad$ (P0) $x,y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

(3) $x,y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

dim. (2)

$$-(x,y) = -1\,(x,y) = \overset{\geq 0}{(-x)}\,\overset{\geq 0}{y} \geq 0 \text{ per (P0)} \Rightarrow xy \leq 0$$

(3)

$$x \cdot y = (-1)^2 \cdot xy = \overset{\geq 0}{(-x)}\,\overset{\geq 0}{(-y)} \geq 0$$

$(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = x \cdot ((-1)(-x)) = x \cdot x = x^2$

$(-1) \cdot x = -x \qquad -(-x) = x$

(1) $x \neq 0$, $x>0$

$x^{-1} \neq 0 \qquad 1 = x \cdot x^{-1} = 0$ assurdo se $x^{-1}=0$ contraddice (P3)!

se $x^{-1}<0$

$\qquad 1 = x \cdot x^{-1} \leq 0$ per (2) assurdo

ES.

$x,y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$

se $x=0$ oppure $y=0$ $\quad xy=0$

Definizioni

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

maggiorante $m \in \mathbb{R}$ di A è ogni $m \geq x \ \forall x \in A$.

A è limitato superiormente se $\exists$ un maggiorante per A.

Se $\exists\, m \in A$ t.c. $x \leq m \ \forall x \in A \mapsto m = \max A$

L'estremo superiore di A, $s = \sup A$, se A è lim. super., se s è maggiorante di A ed è il più piccolo. $\Rightarrow s \leq m \ \forall m$ maggiorante di A.

ASSIOMA $\overline{XVI}$

$A \neq \emptyset$ e limitato superiormente ammette estremo superiore.

Prop. (caratterizzazione dell'assioma)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e lim. super. $s = \sup A \rightarrow$ estremo superiore

$s \in \mathbb{R}$ $s = \sup A \iff$ s è maggiorante di A e $\forall t < s \ \exists x \in A$, t.c. $x > t$.

DIM. "$\Rightarrow$"

Sappiamo che $s = \sup A \Rightarrow s$ è maggiorante di A

e sia $t < s \mapsto t$ non è maggiorante

M magg. $\Rightarrow x \leq M \ \forall x \in A$

t non magg. $\Rightarrow \exists x \in A$ t.c. $x > t$

"$\Leftarrow$"

per assurdo

se s non fosse il più piccolo dei magg., allora $\exists$ un magg. M di A t.c. $M < s$

ma $\forall M < s \ \exists x \in A$ t.c. $x > M$, il che vuol dire che M non è maggiorante.

esem

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ha come estremo superiore 1.

$A \neq \emptyset$? Infatti $\frac{1}{2} \in A$ perché sappiamo $2^{-1} > 0$ perché $2 > 0$ ($\overset{2}{\overset{\parallel}{}}$ $2 := 1+1 > 0$ $1 > 0 \Rightarrow 1+1 > 1$)

$2^{-1} < 1$ dim $\quad 2 > 1$ $\left[\overset{\text{LEMMA}}{a \geq b \text{ e } c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc}\right]$

dim. lemma

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0 \Rightarrow$ per (PO) $(a-b) \cdot c \geq 0 \Rightarrow ac - bc \geq 0 \overset{(SO)}{\Rightarrow} ac \geq bc$

ES. (S)

$a \geq b$, $c \leq 0 \Rightarrow ac \leq bc$ Dimostrare!

Moltiplicando per $2^{-1} \Rightarrow 2 > 1 \Rightarrow \quad 2^{-1} \cdot 2 > 1 \cdot 2^{-1} \Rightarrow 1 > 2^{-1}$

1 è maggiorante di A. Affermo che $1 = \sup A$

Se così non fosse, esisterebbe $t \geq \frac{1}{2}$: $t \leq 1$ e t è magg. di A

E sia $t < 1$, ma $\exists x \in A : x > t$

Se $t \leq 0$, $\frac{1}{2} \in A$ e $\frac{1}{2} > 0 > t \Rightarrow \frac{1}{2} > t$.

se $t > 0$, $x = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \quad t < x < 1 \quad x \in A$.

"Individuare" un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di numeri "naturali".

Def.

$I \subseteq \mathbb{R}$ si dice induttivo se:

1) $1 \in I$

2) $x \in I \Rightarrow x+1 \in I$

Esempi di insiemi induttivi:

(es1) $\mathbb{R}$ è induttivo.

(es2) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $1 \in \mathbb{R}_+$, preso $x>0 \Rightarrow 1+x \geq x \geq 0$

(es3) $I = \{x \mid x \geq 1\}$ $1 \in I(1)$ $x \geq 1$ $1+x \underset{(\geq 0)}{\geq} x \geq 1$ $(1 \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq x \geq 1)$

(es4) $I_2 = \{1\} \cup \{x \mid x \geq 2\}$

Def.

$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I, \forall I \text{ induttivo}\} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I$

OSS.

Se I induttivo, $\mathbb{N} \subseteq I$. Quindi:

- se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$
- $1 \in \mathbb{N}$ $(2 \in \mathbb{N})$ n.b. = $\mathbb{N}$ è induttivo. [se $I \subseteq \mathbb{N}$, I indutt. $\Rightarrow I = \mathbb{N}$.
  $n \in \mathbb{N}$, $n \in I$ $\forall I$ induttivo $\Rightarrow n+1 \in I \Rightarrow \mathbb{N}$ è indutt.
- $0 < x < 1$, $x \notin \mathbb{N}$ $(1 < x < 2)$

Vogliamo dimostrare il seguente:

TEOREMA (P_n)

Se $n \in \mathbb{N}$ e $n < x < n+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Altro teorema (Principio di INDUZIONE)

Supponiamo $p(n)$ P_n delle proposizioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$.

Se P_1 è vera e ($P_n \Rightarrow P_{n+1}$ $\forall n$),

allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIM. $I = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ è vera}\}$, I è induttivo $\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq I \Rightarrow \mathbb{N} = I$.

$I \subseteq \mathbb{N}$

$\blacksquare$

Def.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a^{n+1} := a \, a^n$

($\{n \in \mathbb{N} \mid a^n$ è definito$\} = \mathbb{N}$)

Per definire rigorosamente a^n serve il teorema di *ricorsione*.

Prop

$2^n > 1$. $\forall n$

dim. (per ind.)

$n=1 \Rightarrow 2>1$ vero

se $2^n > 1 \Rightarrow 2^{n+1} > 1 \Rightarrow \underbrace{2 \cdot 2^n}_{2^{n+1}} > 2^n = 2 > 1 \Rightarrow 2^{n+1} > 2 \Rightarrow 2^{n+1} > 1$

DIM. (TEOREMA P_n)

Per *induzione*:

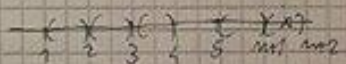
per $n=1$ è vero, segue da $\{1\} \cup \{x \mid x \geq 2\}$ è indutt. $\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq \{1\} \cup \{x \mid x \geq 2\} \Rightarrow$
$1 < x < 2$, $x \notin \mathbb{N}$.

Sia $n \in \mathbb{N}$ assumiamo che $\{n < x < n+1\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Sia $P_n = k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ e $k < x < k+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$.

P_1 è vera.

Assumiamo *vera P_n*



Se per assurdo P_{n+1} non è vera

$\Downarrow$

$\exists$ naturale $x \in \mathbb{N}$ t.c. $n+1 < x < n+2$.

Sia $I := \mathbb{N} \setminus \{x\}$

$I \subsetneq \mathbb{N}$

$x > 1$ $(x \geq n+1 \geq 2 > 1)$

$n+1 < x < n+2$

$m+1 < m+1 < n+2$

$n < m < n+1$

$\Rightarrow 1 \in I$. Sia $m \in I$, cioè $m \in \mathbb{N}$, $m \neq x \Rightarrow m+1 \in I$, altrimenti $m+1 = x$

Quindi I è induttivo.
$I = \mathbb{N}$, che contraddice
$I \subsetneq \mathbb{N}$