Def

Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è detto <u>induttivo</u> se (i) $1 \in I$, (ii) $x \in I \Rightarrow x+1 \in I$

Esempi: $\mathbb{R}$, $I_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$I_2 := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ con $2 := 1+1$

Ins. dei naturali: $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I, \forall I \text{ induttivo}\} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I$

Prop. (Assiomi di PEANO)

$\mathbb{N}$ verifica le seguenti proprietà:

P(i) $1 \in \mathbb{N}$

P(ii) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

P(iii) $n, m \in \mathbb{N}$ e $n+1 = m+1 \Rightarrow n = m$ (segue da prop 4, cancellazione somma)

P(iv) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \neq 1$

P(v) $I \subseteq \mathbb{N}$, I induttivo $\Rightarrow I = \mathbb{N}$

Dim P(iv)

se fosse $n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$ ma $0 \notin \mathbb{N}$ (per assurdo) perché $0 \notin I_1$.

Dim P(v)

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in I \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq I \Rightarrow I = \mathbb{N}$

P(i)-P(v) sono noti come "assiomi" di PEANO.

P(v) è anche detto <u>principio d'induzione</u>.

TEOREMA

Siano $P(n)$ delle proposizioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$. Se $P(1)$ è vera, e supponiamo che $P(n)$ è vera, allora $\Rightarrow P(n+1)$ è vera. Dunque $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIM.

$I := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ è vera}\}$ Per ipotesi $1 \in I$, $n \in I \Leftrightarrow P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera $\Rightarrow$ $n+1 \in I$ per P(v) $\Rightarrow I = \mathbb{N}$.

TEOREMA

Se $x \in \mathbb{R}$ e $n < x < n+1$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $x \notin \mathbb{N}$.

Es. per $n=1$

È immediato che $1 < x < 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$. perché I_2 è induttivo. $I_2 := \{1\} \cup \{x \geq 2\}$

Proposizione 10

$n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n+m \in \mathbb{N}$, $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

DIM

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Per <u>induzione su m</u>. ~~n+1~~ $P(m)$: "$n+m \in \mathbb{N}$"

$P(1)$ è vera $\Rightarrow m = 1 \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$ vero

Se $P(m)$ è vera $\Rightarrow n+m \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+m)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+(m+1) \Rightarrow P(m+1)$ è vera

Segue che $P(m)$ è vera $\forall m$ ossia $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow n+m \in \mathbb{N}$

Analogamente, fissiamo $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(m)$: " $n \cdot m \in \mathbb{N}$". $\forall m \in \mathbb{N}$.

$P(1)$ è vera $\Rightarrow m=1 \Rightarrow n \cdot 1 = n \in \mathbb{N}$ è vera.

Supponiamo che $P(m)$ sia vera $\Rightarrow n \cdot m \in \mathbb{N}$.

$P(m+1) \Rightarrow n \cdot (m+1) \Rightarrow n \cdot m + n \in \mathbb{N}$ per la prima parte già dimostrata.

$P(n) :=$ "n numero primo $\Rightarrow n+2$ numero primo" è sia vera che falsa.

TEOREMA (Esistenza del minimo)

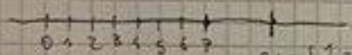
$A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Allora $\exists$ il minimo di A.

DIM.

Se $1 \in A$, allora 1 è il minimo $(1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N})$

Supponiamo che $1 \notin A$. Sia $B := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall 1 \leq k \leq n, k \notin A\}$ $B \subseteq \mathbb{N}$

$1 \in B \neq \emptyset$



$B := \{1, 2, \dots 6\}$ $A = \{7\} \cup \{n \geq 9\}$

$1, \dots, n \notin A$

$n+1$

*

Supponiamo per assurdo che A non abbia minimo. $1 \notin A$.

Sia $n \in B$ $[\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n \Rightarrow k \notin A)$

Se $n+1 \in A \Rightarrow n+1 = \min A$ [contraddice l'ipotesi]

Se $n+1 \notin A \Rightarrow n+1 \in B$

$k \leq n \Rightarrow k \notin A$

$k \leq n+1 \Rightarrow k \notin A$

Quindi B è induttivo

Per $P(U)$ $B \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow B = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$ contraddizione con l'ipotesi.

$B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$

TEOREMA (Esistenza del massimo)

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ e limitato superiormente. Allora $\exists$ il massimo di A.

DIM.

$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e limitato superiormente $\xRightarrow{\text{(assiom.)}}$ allora $\exists\, s = \sup A \in \mathbb{R}$

Supponiamo per assurdo che $s \notin A$

$\left(s = \sup A \iff \forall r < s,\ \exists \overset{(*)}{a} \in A \text{ t.c. } \overset{(*)}{a} > r \right)$

$\exists\, k \in A,\ s-1 < k \leq s \qquad r = s-1$

con $r = k$ $\exists\, h \in A:\ s-1 < k < h < s$

Esiste un lemma: $h, k \in \mathbb{N}$ e $h > k \Rightarrow h-k \in \mathbb{N}$.

$0 < \underbrace{h-k}_{\in \mathbb{N}}$ perché $h > k \Rightarrow 0 < h-k < s-k < 1$ contraddizione.

Oss.

Se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n > m$ allora $n \geq m+1$. (se fosse $n < m+1$ contradd.)

$\hookrightarrow m < n < m+1$ (Teorema $P(n)$))

DIM. lemma

Sia $A := \{ n \in \mathbb{N} \mid k+n \leq h \}$

$h > k \Rightarrow h \geq k+1$ per Oss. $\Rightarrow 1 \in A$. Sia $n \in A$

Supponiamo per assurdo che ogni elemento n di A è tale che $k+n < h$.

$\nexists \left(k+n = h \text{ con } n \in \mathbb{N} \right)$ se $n \in A \Rightarrow h \geq k + (n+1) \Rightarrow n+1 \in A$

$n = h-k$

def. di A.

A è induttivo. $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathbb{N}. \Rightarrow h \in A$.

$k+h \leq h \iff k < 0$ assurdo

TEOREMA (Proprietà archimedea di $\mathbb{N}$)

Siano $x, y \in \mathbb{R}_+$ $\left(:= \{ t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \} \right)$. Allora $\exists\, n \in \mathbb{N}: nx > y$.

Oss. $xn > y \iff \boxed{n > \frac{y}{x}}$

Nota. Il teorema equivale a dire che $\forall z > 0,\ z \in \mathbb{R},\ \exists n:$ $n > z$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente

($\mathbb{N}$ limit. sup. $\Rightarrow \exists\, z > 0,\ z \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}\ z \geq n$)

DIM.

Poniamo $z := \frac{y}{x} > 0$ $A := \{ m \in \mathbb{N} \mid m \leq z \}$

$n > z$.

↳ se $z < 1 \Rightarrow n > z$ $(1 > 0)$ vero.

Assumiamo $z \geq 1$. $1 \in A$. $A \neq \emptyset$. limit. sup. e $A \subseteq \mathbb{N}$.

A ammette max, $m = \max A \Rightarrow m+1 > z$ (se fosse $m+1 \leq z \Leftrightarrow m+1 \in A$ contraddice $m = \max A$)

n.b.

la proprietà archimedea segue dal XVI assioma.

$F_m := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq m \}$.

Def.

A è finito se $\exists f : F_m \to A$ biunivoca.

suriettività

iniettività

$f(F_m) = \{ f(k) \mid k \in F_m \}$ $A := \{ f(1), f(2), f(3), \dots, f(k) \}$ $f(h) \neq f(k)$ se $h \neq k$

ES 1 (two)