GLI INTERI

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$$

$$(A \subseteq \mathbb{R},\ -A := \{x = -a \mid a \in A\})$$

Proprietà

(i) $m < x < m+1 \quad x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

(ii) $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m+n \in \mathbb{Z},\ m \cdot n \in \mathbb{Z}$

(iii) $A \subseteq \mathbb{Z},\ A \neq \emptyset$, se A è lim. sup. $\Rightarrow$ A ha max se lim. inf. $\Rightarrow$ A ha min.

ES. 5

Dimostrare le proprietà fondamentali di $\mathbb{Z}$.

Oss. sul principio di induzione

La formulazione più generale del principio di induzione è la seguente:
sia $N \in \mathbb{Z}$, e siano date proposizioni $P(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \geq N$

Assumiamo che:

(i) $P(N)$ sia vera

(ii) Se sono vere $P(N), \dots, P(M)$ per $N \leq M \Rightarrow$ è vera $P(M+1)$

Tesi: $P(n)$ è vera $\forall n \geq N$, $n \in \mathbb{Z}$.

Segue dal principio standard:

$P'(k)$: "sono vere $P(N), \dots, P(N+k-1)$" per $k \geq 1$

$k-1 \mapsto m$

$\hookrightarrow$ se sono vere $P(N), \dots, P(N+m)$ per $0 \leq m \Rightarrow$ è vera $P(N+m+1)$

<u>Oss</u>. per dimostrare (iii) serve il $\underline{XVI}$ assioma, anche per il minimo.

<u>ES. 5</u>

<u>DIM</u> (iii)

$A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$, limitato inf. $\Rightarrow \exists\, m = \min A$: $m \leq n$ $\forall n \in A$.

Due casi: o $A \subseteq \mathbb{N}$ oppure $\exists x \in A : x \leq 0$, $x \in \mathbb{Z}$.

nel primo caso, segue dal teorema del <u>minimo</u> in $\mathbb{N}$.

Anche il caso $A \subseteq \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

(se $0 \in A \Rightarrow 0$ è il minimo, $0 \notin A \Rightarrow A \subset \mathbb{N}$)

Supponiamo che $(A) \cap \{x<0\} \neq \emptyset$.

Consideriamo $A' := -A \Rightarrow A'$ è limitato superiormente

A lim. inf $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}: M \leq n \Rightarrow -M \geq -n$ $\forall n \in A \Rightarrow -M \geq m$ $\forall m \in A'$

Quindi A' ha massimo m':

$m' \in A'$ e $m' \geq n$ $\forall n \in A'$

$\Rightarrow -m' \leq -n$ $\forall n \in A'$ $\Rightarrow \underbrace{-m'}_{\in A} \leq n$ $\forall n \in A$. Per cui $-m'$ è min A.

<u>DIM</u>. (ii)

Se $n, m \in \mathbb{Z}$, $n+m \in \mathbb{Z}$.

Tre casi:

(i) $n, m > 0$ segue dalla prop. in $\mathbb{N}$.

(ii) $n \vee m$ sono uguali a zero $\Rightarrow m = 0$ $n + 0 = n \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n > 0 > m$ $\longrightarrow$ $n = -m \Rightarrow n+m = 0 \in \mathbb{Z}$

$(-m \in \mathbb{N})$ $\searrow$ $n \neq -m$ $\longrightarrow$ $n > -m \Rightarrow n+m = n-(-m) \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$\searrow$ $\underset{\in \mathbb{N}}{n} < \underset{\in \mathbb{N}}{-m} \Rightarrow -m-n \in \mathbb{N} = -(n+m) \Rightarrow -(-(n+m))$

(iv) $n, m < 0 \Rightarrow -(-n+(-m)) \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ è il più piccolo insieme I di $\mathbb{R}$ tale che:

(i) $\mathbb{N} \subseteq I$ ind.

(ii) $x \in I \Rightarrow -x \in I$.

DIM (ii) parte due

$\forall\, n, m \in \mathbb{Z},\ n \cdot m \in \mathbb{Z}$.

4 casi:

(i) $n, m > 0$ segue dalla prop. su $\mathbb{N} \Rightarrow n \cdot m \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(ii) $n \vee m = 0 \Rightarrow n \cdot 0 = 0 \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n, m < 0 \Rightarrow -(-n)(-m) \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(iv) $n > 0,\ m < 0$ $(-m \in \mathbb{N})$ due sottocasi:

- $m = -n \Rightarrow n \cdot m = n \cdot -n := -n^2 \geq 0 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0)$
- $m \neq -n$ (altri due casi):

(v) $n > -m \Rightarrow n \cdot m = -(n \cdot m) \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(vi) $n < -m \Rightarrow n \cdot m = -[n \cdot (-m)] \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

DIM (iii) parte due

Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$, limitato sup. $\Rightarrow \exists\, m = \max A$: $m \in A$ e $m \geq n\ \forall n \in A$.

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ segue dal teorema del massimo su $\mathbb{N}$.

Supponiamo quindi che $A \cap \{x \leq 0\} \neq \emptyset$.

Consideriamo $-A := A' \Rightarrow A'$ è limitato inferiormente

A è lim. sup. $\Rightarrow \exists\, M \in \mathbb{R} : M \geq n\ \forall n \in A \Rightarrow -M \leq -n\ \forall n \in A \Rightarrow -M \leq n\ \forall n \in A'$

Quindi A' ha minimo m':

$m' \in A'$ e $m' \leq n\ \forall n \in A'$

$\Rightarrow -m' \geq -n\ \forall n \in A' \Rightarrow -m' \geq n\ \forall n \in A$ per cui $-m'$ è $\max A$.

$\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato e completo.

9 { (S1)-(S4), (P1)-(P4), (SP) }

6 { (O1)-(O4) totale, (SO)-(PO) }

XVI assioma.

Def.

$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I\ \forall I \text{ induttivo}\}$

I si dice induttivo

$1 \in I;\ x \in I \Rightarrow x+1 \in I$

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$

I RAZIONALI $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid x = mn^{-1} \text{ con } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

$mn^{-1} = \frac{m}{n} = m/n$ (not.)

Oss.
$m \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\ q \neq 0$

$\frac{m}{q}$ se $q > 0$ per def $\Rightarrow \frac{m}{q} \in \mathbb{Q}$ se $q < 0 \Rightarrow -q > 0$ $mq^{-1} = m(-(-q))^{-1} =$ multiplicando per (-1) l'opposto dell'opposto

$(-m)(-q)^{-1}$
$\in \mathbb{Z}\ \in \mathbb{N}$

Prop.
$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato non completo.
(non soddisfa il XVI assioma).

DIM. (a) $r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r+s \in \mathbb{Q}$

$r = \frac{m}{n}$ $s = \frac{p}{q}$ $m, p \in \mathbb{Z}$ $n, q \in \mathbb{N}$

$mn^{-1} = mqq^{-1}n^{-1} = (mq)(qn)^{-1}$

(NB se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ infatti $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = xx^{-1}\ yy^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$ per cui il prodotto dei reciproci è reciproco del prodotto)

$(pq)^{-1} = (pn)(nq)^{-1}$ $r+s = (mq)(nq)^{-1} + (pn)(nq)^{-1} = (mq)(pn) + (nq)^{-1} \in \mathbb{Q}$

(ii) $r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow rs \in \mathbb{Q}$

$mn^{-1} \cdot pq^{-1} = (mp) \cdot (nq)^{-1} \in \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{Z}\ \in \mathbb{N}$

(n.b. $1 \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ← valgono le precedenti relazioni tra
da discutere $\sqrt{2}$.

$0 < \frac{1}{2} < 1$
$\in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ ha elem neutro $x \cdot 1 = x$

$0 \in \mathbb{Q}$, $\forall r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists -r \in \mathbb{Q}$ $r - r = 0$ (S1)-(S4) e (P1)(P4) sono soddisfatte.

se $r \in \mathbb{Q}$ $r \neq 0 \Rightarrow \exists r^{-1} = (m \cdot n^{-1})^{-1} = m^{-1}n \in \mathbb{Q}$
$\hookrightarrow m \neq 0$

(SP) $r(s+t) = rs + rt$ $\forall$ numero reale

Ordine

(O1) (O4) derivano dagli assiomi di $\mathbb{R}$ perché $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Così anche (SO) e (PO).

$\mathbb{Q}$ non è <u>completo</u>. $\exists A \subseteq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, lim sup ma tale che non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

<u>dim.</u>

$A = \{ r \in \mathbb{Q},\ r>0 \text{ e } r^2 < 2 \}$ $A \neq \emptyset$ perché $1 \in A$ $\left(\frac{7}{5} \in A \Rightarrow \frac{49}{25} < 2\right)$

2 è un maggiorante. se $r \leq 1 < 2$

supponiamo $r \in A$, $r>1$. $1<r<2$.

$r > 1 \Rightarrow r < r \cdot r < 2$

$\in A$

A è limitato superiormente. Supponiamo per assurdo che $\exists s = \sup A \in \mathbb{Q}$.

Definiamo $t := \boxed{\frac{2s+2}{s+2}}^{(I)} = s - \frac{s^2-2}{s+2}$

$\frac{\cancel{s^2}+2s-\cancel{s^2}+2}{s+2} = \frac{2s+2}{s+2}$

Osserviamo che $\boxed{t^2 - 2 = \frac{2(s^2-2)}{(s+2)^2}}^{(II)}$

infatti $t^2 - 2 = \left(\frac{2s+2}{s+2}\right)^2 - 2 = \frac{4s^2+4+8s}{(s+2)^2} - 2 = \frac{4s^2+4+4s-2(s+2)^2}{(s+2)^2} = \frac{4s^2+4+4s-2s\ldots}{(s+2)^2}$

$\frac{4s^2+4+8s-2(s^2+4s+4)}{(s+2)^2} = \frac{4s^2+4+\cancel{8s}-2s^2-\cancel{8s}-8}{(s+2)^2} = \frac{2s^2-4}{(s+2)^2} = \frac{2(s^2-2)}{(s+2)^2}$

Usiamo anche $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r^2 \neq 2$.

$s \in \mathbb{Q}$ $s^2 \neq 2$ ma allora $s^2 > 2$ oppure $s^2 < 2$.

$s - t = \frac{s^2-2}{s+2} > 0$ per cui $s > t$.

Se $s^2 > 2$ da (II) $\Rightarrow t^2 > 2$. e da (I) $\Rightarrow s > t$.

Se $r \in A \Rightarrow r^2 < 2 < t^2 \Rightarrow r^2 < t^2 \Rightarrow r < t$ <u>contraddizione</u>

$-2 < -3$

$(x, y \in \mathbb{R}$ $\boxed{x, y > 0}$ $x^2 > y^2 \iff x > y$

$4 < 9$ $-2 < -3$

vale soltanto se sono entrambi positivi

$x^2 - y^2 > 0$ $x - y > 0$ $\Rightarrow$ $(x-y)(x+y) > 0$

$x > 0$ $\vee 0$

il prodotto è positivo

se <0 è negativo

t è un maggiorante di A ma $t<s$. Contraddizione! s^2 non è maggiore di 2

Allora, se $s^2<2$ $t>s$ per (I) $t^2<2 \mapsto t\in A$.

Da (I) segue che $t>0$ contraddizione perché s è un maggiorante di A.

s^2-2 è negativo $-(s^2-2)>0$ $\quad t-s = \dfrac{s^2-2}{s+2}>0$

Per cui $\mathbb{Q}$ non è completo. ☒

Teniamo il primo <u>teorema</u> sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$. (Pitagora - Euclide)

<u>dim.</u>

$r\in\mathbb{Q}$ e $r^2=2$ per assurdo.

$r\neq 0$ se $r<0$ $(-r^2)=2$ per cui possiamo assumere $r>0$. (<u>lemma</u>)

Se $t\in\mathbb{Q}$, $\exists!\ n>0$: $t=mn^{-1}$ ed m e n non hanno divisori comuni. con $m\in\mathbb{Z}$ $n\in\mathbb{N}$

<u>def</u> $a|b$ per $b\in\mathbb{Z} \iff \exists k\in\mathbb{Z} : b=ka$

(m.b.) se $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow a|0$ $\quad 1|b\ \forall b\in\mathbb{Z}\ b\neq 0$

<u>dim. del lemma</u>

Definiamo $D:=\{q\in\mathbb{N} \mid \exists\, p\in\mathbb{Z} \text{ t.c. } pq^{-1}=t\}$ $D\neq\emptyset$ per def. $D\subseteq\mathbb{N}$,

quindi per il teorema sul minimo,

$\exists!\ n:=\min D$ per cui $\exists\, m\in\mathbb{Z} : t=mn^{-1}$

Se per assurdo m,n avessero un divisore $d>1$ comune $\Rightarrow m=m'\cdot d$ e $n=n'\cdot d$ con $m,n\in\mathbb{Z}$ $\quad \dfrac{m}{n}=\dfrac{m'\cdot \cancel{d}}{n'\cdot\cancel{d}}$ con $n'>0\in\mathbb{N}$ $\quad n'\cdot d=n$ $\boxed{n'<n}$

Questo contraddice che $n=\min D$. ☒

Del teorema su $\sqrt{2}$, <u>dim.</u>

Possiamo assumere che $r=\dfrac{m}{n}$ con $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. $n\neq 0$ e che non esistono divisori comuni >1.

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2$ $\quad m^2$ è pari $\mapsto m$ è pari $\mapsto (2k)^2=2n^2 \Rightarrow 4k^2=2n^2 \Rightarrow$ $2k^2=n^2$ e anche n è pari. contraddizione perché M.C.D. $(m,n)=1$. ☒

<u>Oss.</u>

<u>sup</u> $A\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ perché in $\mathbb{R}$ vale il $\overline{XII}$ assioma.

<u>Prop.</u> $s^2=2$