Definiamo $D := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$. <u>ES.6</u>

Dimostrare che $D \neq \emptyset$, lim. sup. e che $s = \sup D \Rightarrow s^2 = 2$. ($s^2 > 2$, $s^2 < 2$ non può essere)

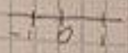
Se $A \subseteq B$, B lim. sup. $\Rightarrow \sup A \leq \sup B$

x_0 <u>cima</u>

$m < x < m+1 \leq 0$

$-m > -x > -(m+1) \geq 0$ contr.

$m+1 \in \mathbb{N}$ $\quad -m-1 \in \mathbb{N}$ $\quad m \in \mathbb{N}$



$\boxed{0 < x < 1} \Rightarrow 1 < x+1 < 2$ $\quad \Big| \; x+1 \notin \mathbb{N}$, $x \Rightarrow \notin \mathbb{Z}$

$x < 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

$x \neq 0$

$x \notin -\mathbb{N} \subseteq \{ x \leq 1 \}$ $\Big\} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

Se $r < s$ sono razionali, allora $\Rightarrow \exists t \in \mathbb{Q} : r < t < s$

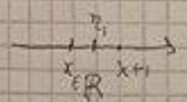
Ad esempio $t := \frac{r+s}{2}$ $\quad r < \frac{r+s}{2} \Rightarrow 2r < r+s \quad 2r = r + \cancel{r} < \cancel{r} + s \Rightarrow r < s$

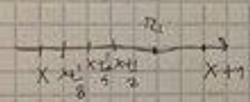
$\frac{r+s}{2} < \frac{s+s}{2} = s \quad \left(\frac{2s}{\cancel{2}} = s \right)$

<u>TEOREMA</u> (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

Siano $x < y$ numeri reali. Allora $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Dato un numero reale x esiste una successione infinita di razionali che approssimano a x.

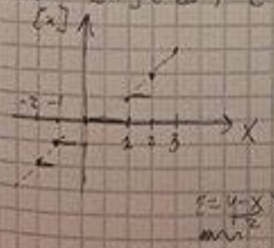




<u>DIM.</u>

<u>Def</u> $x \in \mathbb{R}$ $\max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \} := [x]$ = parte intera di x $\quad A \subseteq \mathbb{Z}$, lim. sup. $\Rightarrow$ ha max.

Quindi $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leq x < [x] + 1$ se $x > [x]+1$ allora $[x]$ non è il max. dell'insieme



$\left[-\frac{1}{2} \right] = -1$ $\qquad D_f = \mathbb{Z}$

$n \in D_f \quad [n] = n$

N.B. $A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x, \forall x \in \mathbb{R} \}$

$A \neq \emptyset$ <u>dim.</u>

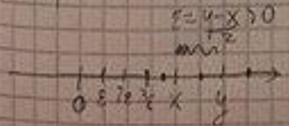
se $x \geq 0 \Rightarrow 0 \in A$

se $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow$

per (<u>IMA</u> prop. archimedea)

$\exists n \in \mathbb{N} \mid n > -x \Rightarrow$

$-n < x \qquad -n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -n \in A$



Sia $N \in \mathbb{N}$ t.c. $N > \frac{1}{y-x}$ $\qquad y - x > 0 \Rightarrow y - x > \frac{1}{N}$

Sia $k = [xN]$, e sia $r = \frac{k+1}{N}$. Allora $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$, $k+1 \in \mathbb{Z}$

$k \le xN < k+1 \implies$

$\frac{K}{N} \le x < \frac{K+1}{N} = r \implies x<r$

$x<r=\frac{K}{N}+\frac{1}{N} \le x+\frac{1}{N}$ Ma $N>\frac{1}{y-x} \to y-x>\frac{1}{N}$

$\frac{1}{N}<y-x$

$x+\frac{1}{N} < x+(y-x)=y$

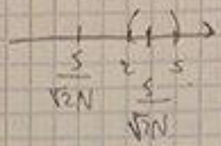
ES.7

È anche vero che $\forall r,s \in \mathbb{Q}$ $r<s$. allora $\exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ t.c. $r<\alpha<s$.

(Suggerimento: trovare α della forma $\frac{k+\sqrt{2}}{N}$ con $k\in\mathbb{Z}$, $N\in\mathbb{N}$). $\Big[\ \frac{s}{\sqrt{2}N}$ con $s\in\mathbb{Z}$, $N\in\mathbb{N}$

$\sqrt{2}N > \frac{1}{r-s}$ $r-s > \frac{1}{\sqrt{2}N}$

$k=[r\cdot\sqrt{2}N]$



ES.5

(1) Se $m<x<m+1$ $x\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z} \implies x\notin\mathbb{Z}$.

dim

Per casi: se $m>0$, vale il teorema relativo ad $\mathbb{N}$, per cui $x\notin\mathbb{Z}$.

Per $1<x<2 \implies x\notin\mathbb{Z}$ perché $x\notin\mathbb{N}$ $(I_1:=\{1\}\cup\{x\ge 2\})$

Se $0<x<1 \implies x\notin\mathbb{Z}$ perché $x<1 \implies x\notin\mathbb{N}$, $x\neq 0$ e $x\notin -\mathbb{N}\subseteq\{x\le 1\} \implies x\notin\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup(-\mathbb{N})$

Se $m<0 \implies m<x<m+1<0$ Allora $-m>-x>-(m+1)>0 \implies x\notin\mathbb{Z}$ (tra un naturale e il successore non vi sono naturali)

$(-m>0)$ $-m\in\mathbb{N}$ $(m+1)\in\mathbb{N}$ $-m-1 \Rightarrow \in\mathbb{N}$

ES.7 (tesi)

$\forall r,s\in\mathbb{Q}: r<s \implies \exists\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ t.c. $r<\alpha<s$.

DIM.

Sia $\sqrt{2}N\in\mathbb{R}$ (con $N\in\mathbb{N}$) t.c. $\sqrt{2}N>\frac{1}{s-r}$ $\left(\implies s-r>\frac{1}{\sqrt{2}N}\right)$

Sia $K:=[r\cdot\sqrt{2}N]$ e sia $\alpha:=\frac{s}{\sqrt{2}N}\in\mathbb{R}$ ove $s:=K+1$

Per la proprietà della parte intera si ha che: $K\le r\cdot\sqrt{2}N<K+1 \implies \frac{K}{\sqrt{2}N}\le r<\frac{K+1}{\sqrt{2}N}=\alpha$ per cui $r<\alpha$.

$\frac{K}{\sqrt{2}N}\le r \implies \frac{K}{\sqrt{2}N}+\frac{1}{\sqrt{2}N}\le r+\frac{1}{\sqrt{2}N}$. Sappiamo che $s-r>\frac{1}{\sqrt{2}N} \implies s>r+\frac{1}{\sqrt{2}N}$, ovvero

$r+\frac{1}{\sqrt{2}N}<s$. $r<\underbrace{\frac{s}{\sqrt{2}N}}_{\alpha}\le r+\frac{1}{\sqrt{2}N}<s$.

Es. 5

(IV) Corollario al teor. ($m<x<m+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$). Se $n, m \in \mathbb{Z}$, $n>m \Rightarrow n \geq m+1$.

dim.

Se $n, m > 0$ vale il cor. relativo a $\mathbb{N}$ (per assurdo, se $n < m+1 \Rightarrow m < n < m+1$ contraddizione)

Se $n, m < 0 \Rightarrow -n, -m \in \mathbb{N}$ per assurdo. sia $n < m+1 < 0 \Rightarrow -n > -(m+1) > 0$

$\underbrace{-n}_{K \in \mathbb{N}} > -m-1 > 0 \Rightarrow \underbrace{-m}_{K+1 \in \mathbb{N}} > -n > \underbrace{-m-1}_{K}$ contraddice il teorema. $\in \mathbb{N}$

TEOREMA DI RICORRENZA

(Def. dato un insieme $A \neq \emptyset$, una successione in A è una funzione $a: \underset{\text{dominio}}{\mathbb{N}} \to \underset{\text{codominio}}{A}$

$\forall n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in A$)

$\{a_n\}$ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$A \neq \emptyset$, sia $\alpha \in A$ e sia $f_n: A \to A$, $\forall n$.

Allora $\exists !$ successione $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in A t.c. $\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = f_n(a_n) \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

(famiglia) - successione di funzioni

Esempi: $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad A = \mathbb{R}$ $\quad \alpha = a$

$a_1 = a$ $\quad a_2 = f(a) = a^2$ $\quad a_3 = f(a^2) = a^3$ $\quad \boxed{a^n := a_n}$ $\quad a_{n+1} = a_n \cdot a$

$n!$ $\quad f_n(x) = nx$ $\quad$ def. $n! =$ n fattoriale $\quad A = \mathbb{R}$

$a_1 = 1$ $\qquad a_n = n(n-1)(n-2)\dots 1$ $\quad n! := a_n$

$a_2 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot 6 = 24$

Simbolo di sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$A = \mathbb{R}$

Sia $\{a_k\}$ una succ. in $\mathbb{R}$

$f_n(x) = a_n + x$ $\quad$ t.c. $\begin{cases} \sigma_1 := a_1 \\ \sigma_n := f_{n-1}(\sigma_{n-1}) \quad \sigma_{n+1} = f_n(\sigma_n) \end{cases}$

$\sigma_1 = a_1$

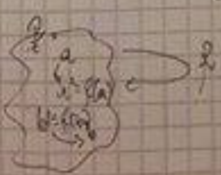
$\sigma_2 = a_2 + a_1$

$\sigma_3 = a_3 + a_2 + a_1$

$\vdots$

$\sigma_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$

$f(z) = z$.



data $\alpha \in A$ $\quad \exists ! \ a_n$: $\begin{matrix} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = f_n(a_n) \end{matrix}$

data f_n

Def.

Un n-segmento è una successione $\{b_k\}$ in A t.c. $\begin{cases} b_1 = \alpha \\ b_k = f_{k-1}(b_{k-1}) & 2 \le k \le n \end{cases}$ (se $n=1$, ...)

Lemma (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ un n-segmento.

(2) se $\{b_k\}$ è un n-segmento $\Rightarrow$ $\{b_k\}$ è un m-segmento $\forall\, 1 \le m \le n$

(3) se $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono n-segmenti $\Rightarrow$ $b_k = c_k$ $\forall\, 1 \le m \le n$ (hanno termini uguali fino ad n fissato)

DIM.

(1) Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n=1$ $b_k := \alpha$ ($b_1 = \alpha$) $\Rightarrow$ $\{b_k\}$ è 1-segmento.

Sia dato un n-segmento $\{b_k\}$, $\begin{cases} c_k = b_k & \forall k \le n \\ c_k := f_n(b_n) & \forall k \ge n+1 \end{cases}$

Affermo che $\{c_k\}$ è un $n+1$-segmento: $c_1 = b_1 = \alpha$. Sia ora $2 \le k \le n+1$: due casi

- $k \le n$. $c_k = b_k = f_{k-1}(b_{k-1}) = f_{k-1}(c_{k-1})$.

- $k = n+1$ $c_{n+1} = f_n(b_n) = f_n(c_n)$

(2) se $\{b_k\}$ è verificata per $2 \le k \le n$ allora lo è anche per un $m \le n$ $\Rightarrow$ $2 \le k \le m \le$ segue dalla definizione di n-segmento.

(3) Per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n=1$ $\Rightarrow$ $b_1 = c_1 = \alpha$ $\forall\, 1 \le k$.

Assumiamo che l'affermazione sia vera per tutti gli n-segmenti.

Siano $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ due $n+1$-segmenti. Per (2) $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono due n-segmenti.

$\Rightarrow$ $b_k = c_k$ $\forall\, 1 \le k \le n$

Allora $b_{n+1} = f_n(b_n) = f_n(c_n) = c_{n+1}$

DIMOSTRAZIONE del teorema di ricorrenza.

$a_n := \begin{cases} \alpha & \text{per } n=1 \\ f_{n-1}(b_{n-1}) & \text{per } n \ge 2 \end{cases}$ dove $\{b_k\}$ è un qualunque n-segmento.

Oss. la definizione è ben posta. Se $\{c_k\}$ è un n-segmento $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $c_n = b_n$ $\forall k \le n$

$f_{n-1}(b_{n-1}) = f_{n-1}(c_{n-1})$

$a_{n+1} := f_n(b_n)$ Per induzione su $n \in \mathbb{N}$: per $n=1$ $a_1 = \alpha$ vero

assumiamo che $a_{n+1} = f_n(a_n)$

$a_n := b_n$ dove $\{b_k\}$ è un n-segmento Oss. (punto 1)

(la def è ben posta perché se $\{c_k\}$ è un n-segmento $\Rightarrow c_n = b_n$) (punto 3)
Per induzione:

$n=1 \Rightarrow a_1 = b_1 = \alpha$ vero.
assumiamo che $a_{n+1} = f_n(a_n) \Rightarrow a_{n+2} = b_{n+2}$ con $\{b_k\}$ è un n+2-segmento.
$\Rightarrow b_{n+2} = f_{n+1}(b_{n+1}) = f_{n+1}(a_{n+1})$

$\{a_k\}$ n+2 seg. $\{b_k\}$ è un n+1-seg.

Unicità: sia $\{a'_k\}$ una succ. t.c. $\begin{cases} a'_1 = \alpha \\ a'_{n+1} = f_n(a'_n) \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

(Per induzione) che $a'_n = a_n \ \forall n \geq 1$.
Per $n=1 \Rightarrow a_1 = \alpha = a'_1$ Assumiamo che $a'_n = a_n \Rightarrow a'_{n+1} = f_n(a'_n) = f_n(a_n) = a_{n+1}$
$\boxtimes$

Abbiamo usato l'induzione:
- $\exists$ n-segm. $\forall n \in \mathbb{N}$,
- due n-segm. hanno i primi ~~…~~ n-valori uguali,
- per l'unicità. (teor. di ricorrenza)

$D: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ $s = \sup D$ $s^2 = 2$ def. $\Rightarrow s = \sqrt{2}$
h.b. $t > 0$ e $t^2 = 2 = s^2$ $t^2 - s^2 = \underbrace{(t+s)}_{\neq 0}(t-s) = 0$

Es. $t, s \in \mathbb{R}$

$t^2 = s^2 \Rightarrow t = s$ oppure $t = -s$
dim.
$t \neq s$ $0 = t^2 - s^2 = (t+s)\overset{\neq 0}{(t-s)}$ divido per $(t-s)^{-1} \Rightarrow t = -s$.

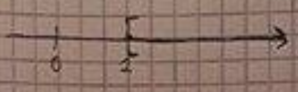
Es. 5
$I = \{\frac{1}{2}\} \cup \{x \geq \frac{1}{2}\}$ $x + 1 \geq \frac{3}{2} \geq 2$ ma $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \notin I$

$I = \{x \geq -a\}$ $-a + -a = -2a < -a$ I non è chiuso rispetto alla somma.

$\exists$ insiemi induttivi $I \subseteq \mathbb{R}_+$ non chiusi rispetto alla somma?

$\{0 < x \leq \frac{1}{4}\} \cup \{x \geq 1\}$

$\{a \leq x \leq b\} = [a, b]$



$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b)$ $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Martedì 16:30 - 17:30 Aula F, largo San Leonardo Murialdo.
prossimo.