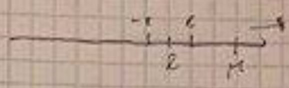
Def $\{a_k\}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto a_k \in \mathbb{R}$ si dice ha limite $l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon: |a_n - l| < \varepsilon,\ \forall n \geq N$

$a_n \to \pm\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N: a_n \gtrless M,\ \forall n \geq N$



Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e A non è lim. sup. (o inf), poniamo $\sup A = +\infty$ (o $\inf A = -\infty$)
In altre parole, se $\sup A = +\infty \iff \forall M\ \exists a \in A: a > M$

esempi: $\sup \mathbb{N} = +\infty$ $A = \left\{ y = \frac{n^2+1}{n-1} \middle| n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\} \Rightarrow \sup A = +\infty$

$\frac{n^2+1}{n-1} > \frac{n^2-1}{n-1} = n+1 > n$ per cui l'insieme è non limitato.

Def. $\{a_n\}$ si dice regolare se $\lim a_n = l$ con $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$.

($(-1)^n$ è irregolare perché non ha limite)

Def. Una successione si dice crescente se $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n$. È decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n$.
È strettamente crescente/decrescente se $a_{n+1} > a_n$ / $a_{n+1} < a_n$, $\forall n$.

es. $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ è strett. crescente.

Queste successioni sono dette monotòne.

TEOREMA 1 Una successione monotona è regolare. Se $\{a_n\}$ (funzione $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$) è crescente $\Rightarrow \lim a_n = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ (insieme)
Se a_n è decrescente $\Rightarrow \lim a_n = \inf a_n$

DIM. Sia $\{a_n\}$ crescente e sia A l'insieme $= \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Ci sono due casi:
A è lim. sup oppure non è lim. sup.

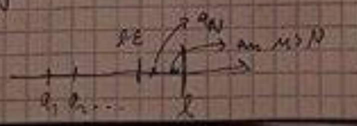
$\Downarrow$ $\sup A = l \in \mathbb{R}$ $\Downarrow$ $\sup A = +\infty$

Consideriamo il primo caso.

(1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_N: a_N > l - \varepsilon$ (non maggiorante) $\forall n \geq N$. la succ. è crescente $\Rightarrow a_n \geq a_N$

$a_n \to l$. Facciamo vedere che $0 \leq l - a_n$ (perché l è sup A) $\rightarrow a_n > a_N \geq l - \varepsilon$ $\rightarrow \varepsilon > l - a_n$

Per cui $0 \leq l - a_n < \varepsilon$, che implica $|l - a_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$



Secondo caso: $\sup A = +\infty$. $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a_n : a_N > M$.

Ma $a_n \geq N$ $\quad a_n \geq a_N > M$.

per def. di monotonia

<u>TEOREMA 2</u>. (del confronto, "dei carabinieri")

Siano $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n \to l$ e $b_n \to l \Rightarrow c_n \to l$ ($l \in \mathbb{R}$, o $l = +\infty$ non serve $c_n \leq b_n$

$l = -\infty$ non serve $a_n \leq c_n$

<u>DIM</u>.

Caso finito ($l \in \mathbb{R}$). Fisso $\varepsilon > 0$, so che $\exists N_1 : |a_n - l| < \varepsilon\ \forall n \geq N_1$

e che $\exists N_2 : |b_n - l| < \varepsilon\ \forall n \geq N_2$.

Prendo $N := \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow$ se $n > N$ $|a_n - l| < \varepsilon$ e $|b_n - l| < \varepsilon$

$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$

$$l - \varepsilon < a_n \leq \boxed{c_n} \leq l - \varepsilon < b_n \Rightarrow |c_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

(Per esercizio, dimostrare i casi $l = \pm\infty$).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \text{ anche } \sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \zeta(\alpha) = \text{funzione zeta di Riemann.}$$

con $\alpha > 1$

Caso in cui $l = +\infty$. Se $a_n \to +\infty \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ a_n > M$

per cui non serve $c_n \leq b_n$, anche $c_n \to +\infty$

Nel caso in cui $l = -\infty$. Se $a_n \to -\infty \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ a_n < M$

per cui non serve $a_n \leq b_n \Rightarrow c_n \to -\infty$

$c_n \to -\infty \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ c_n < M$

<u>ES. 8</u> Dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{2+n}{1+n} = 1$.

Per def., si ha che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{2+n}{1+n} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{2+\cancel{n}-1-\cancel{n}}{1+n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{1+n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 1+n > n.$$

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} 1+(-1)^n$ non esiste.

Si ha che $|1+(-1)^n| = 2$ dato che $|(-1)^n| = 1$.

Qu. $1+(-1)^n \not\to +\infty$ perché $|a_n| = 2$. $|a_n| \leq 2$

$a_n \not\to \ell \in \mathbb{R}$.

Se n è pari $\Rightarrow a_n = 1+1=2$

L'insieme dei valori di a_n è $A = \{2, 0\}$. Se n è dispari $\Rightarrow a_n = 1-1=0$

Sia $\ell \neq 2 \Rightarrow |\ell-2|>0$ ma $2 \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ se $\varepsilon = \frac{|\ell-2|}{2}$.

ES. 3 Dimostrare che $(a^n)^m = (a^m)^n$, con n, m interi positivi.

Per induzione su $m \in \mathbb{N}$. Per $m=1$, la tesi è vera $\Rightarrow (a^n)^1 = (a)^n = a^n$.

Assunta come vera $P(m)$, dimostriamo $P(m+1)$.

$\Rightarrow (a^n)^{m+1} = (a^{m+1})^n \Rightarrow a^{mn+n} = (a)^{mn+n} := (a^n)^m \cdot a^n$

$(a^{m+1})^n = a^{mn+n} := (a)^{mn+n} = (a^m)^n \cdot a^n$

Quindi la tesi risulta vera $\forall m \in \mathbb{N}$.

$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|\ell|, |\ell-2|\} > 0$ $\quad \{x \mid |x-\ell| < \varepsilon\} \not\ni 0, 2$

$|\ell| \geq 2\varepsilon$

$2\varepsilon \leq |x-\ell| < \varepsilon$

Prop. Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni e $a_n \to \alpha \in \mathbb{R}$, $b_n \to \beta \in \mathbb{R}$.

(i) $\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad c \cdot a_n \to c\alpha$

(ii) $a_n + b_n \to \alpha + \beta$

(iii) $a_n b_n \to \alpha\beta$

(iv) Se $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$

$\frac{2+n}{1+n} = \frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$ = sappiamo che $\frac{1}{n} \to 0$

da (i) $\Rightarrow \frac{2}{n} \to 0$

$c=2$

da (ii) $\Rightarrow 1+\frac{2}{n} \to 1$

e per (iv) $\Rightarrow \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$

N.B.:

se $a_n \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

DIM Prop. (iii)

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n-\alpha)b_n + \alpha(b_n-\beta)| \le |(a_n-\alpha)||b_n| + |\alpha|\underbrace{|b_n-\beta|}_{0}$$

$b_n \to \beta \implies |b_n-\beta| \to 0 \qquad |a_n-\alpha| \to 0$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: |b_n-\beta|<\varepsilon$

Oss. se $b_n \to \beta \in \mathbb{R} \implies \exists M: |b_n| \le M$

se $\varepsilon=1$ $\exists N: |b_n-\beta|<1\ \forall n>N$

$\implies |b_n| = |b_n-\beta+\beta| \le |\beta| + |b_n-\beta| \le 1+|\beta|$

$\forall n>N \qquad M=\max\{|b_1|, |b_2|, \dots |b_N|, 1+|\beta|\}.$

SERIE

Data una successione $\{a_n\}$, consideriamo $s_n := \begin{cases} a_1 & n=1 \\ s_{n-1}+a_n, & n>1 \end{cases}$

$s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$

Abbiamo visto la serie geometrica $s_n(x) = x+x^2+\dots+x^n \qquad \{a_n\}=\{x^n\}$

s_n = somme parziali

$s_n(1)=n, \quad x\neq 1 \quad s_n(x) = \dfrac{x-x^{n+1}}{1-x} \qquad$ Se $|x|<1 \implies s_n(x) \to \dfrac{x}{1-x}$

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a l se $s_n \to l$.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \left(\text{es. } \sum_{k=7}^{\infty \text{ (oppure } n)} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\dots\right)$$

Prop.

termine della serie

Se la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge (ovvero se $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \to l \in \mathbb{R}$) $\implies \lim a_n \to 0$

DIM

Per ipotesi $s_n \to l \implies s_{n-1} \to l$

$a_n = \underbrace{s_n}_{l} - \underbrace{s_{n-1}}_{l} = l - l \to 0$

Attenzione! Non è vero in generale che se $a_n \to 0 \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Esempio

$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \qquad \sqrt{k} \to +\infty \qquad$ quindi $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \to 0 \qquad$ ma $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$1+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\dots+\frac{1}{\sqrt n} \ge \underbrace{\frac{1}{\sqrt n}+\frac{1}{\sqrt n}+\dots+\frac{1}{\sqrt n}}_{n \text{ termini}} = \frac{n}{\sqrt n}=\sqrt n \Rightarrow s_n \ge \sqrt n$$

$\sqrt n \to \infty \Rightarrow s_n \to +\infty$

$$\zeta(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \boxed{\zeta\left(\tfrac12\right)=+\infty} \qquad \zeta(-1)=\sum_{k=1}^{\infty} k = 1+2+3+4+\dots$$

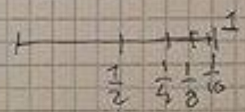
Es. (SERIE DI MENGOLI) (Serie TELESCOPICA)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad a_k=\frac{1}{k(k+1)}$$

$$\to \frac12+\frac16+\frac1{12}+\frac1{20}+\dots+\frac1{n(n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac1k-\frac1{k+1}\right) = \left(1-\cancel{\frac12}\right)+\left(\cancel{\frac12}-\cancel{\frac13}\right)+\left(\cancel{\frac13}-\cancel{\frac14}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac1{n-1}}-\cancel{\frac1n}\right)+\left(\cancel{\frac1n}-\frac1{n+1}\right)$$

$$=1-\frac1{n+1}\to 1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac1{k(k+1)}=1$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac1{2^k}=\frac{\frac12}{1-\frac12}=1$$

OSS. Se $a_k\ge0 \Rightarrow s_n$ è monotona crescente $\Rightarrow s_{n+1}\ge s_n\ \forall n$.

$s_{n+1}-s_n=a_{n+1}\ge0$

$\Downarrow$

s_n è regolare $\to s_n\to+\infty$

$\to s_n\to l\in\mathbb{R}$.

$$\frac1{(k+1)^2}<\frac1{k(k+1)} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac1{(k+1)^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac1{k(k+1)}<1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac1{(k+1)^2}\le1 \to \sum_{k=2}^{\infty}\frac1{k^2} \qquad \zeta(2)-1=\boxed{\zeta(2)<2}$$

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{Se } \beta>\alpha \text{ e } \zeta(\alpha)<\infty \Rightarrow \sum_{1}^{n} \frac1{k^\beta}<\frac1{k^\alpha}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac1{k^\alpha}<\infty$$

$$\Rightarrow \zeta(\alpha)<\infty\ \forall\alpha\ge2 \qquad \zeta(\alpha)=+\infty\ \forall\alpha\le\frac12$$

TEOREMA $\zeta(\alpha) < \infty \iff \alpha > 1.$

Potenze con esponente reale $\left(2^{\sqrt{2}}, \frac{1}{3^{\pi}}, (\sqrt{2})^{\pi}\right)$ oppure $(\sqrt{2})^{-\sqrt{2}}$

Def. (i) $1^x := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Sia $a > 1$, $x = 0$. $a^x := \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ \text{se } x > 0 \ \sup\{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \ r < x\} \\ \text{se } x < 0 \Rightarrow \frac{1}{a^{-x}} \end{cases}$

Se $r_k \in \mathbb{Q}_+$ $r_k \to x \Rightarrow a^x = \lim a^{r_k}$ $\qquad 2^{\sqrt{2}} \quad 2, 2^{7/5}, 2^{\frac{141}{100}}$

Prop. Se $a > 1 \Rightarrow a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^n \to +\infty$

Se $x > y \Rightarrow a^x > a^y \qquad \frac{a^x}{a^y} > 1 \Rightarrow a^{(x-y)} > 1$

N.B. $\begin{cases} \text{se } x > 0, \ a^x > 1 \\ \exists n: \frac{1}{n} < x \quad a^x \geq a^{1/n} > 1. \end{cases}$

Se $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

DIM. (teorema)

(parte uno) $\zeta(1) = +\infty$. Se $\alpha \leq 1 \Rightarrow \zeta(\alpha) = +\infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ si chiama serie armonica.

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{m} + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$2^0 \quad 2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \qquad 2^{n-1} \qquad 2^n$

qui ci sarebbe $\frac{1}{2^{n-1}}$ $\qquad 2^n$

Il numero di termini è $2^n - 2^{n-1}$ $\qquad$ raggruppo per potenze di 2.

$2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$ per ogni parentesi.

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}, \ \forall n \geq 0. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sup_N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \forall n$$

per cui $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ per cui $\zeta(2) = +\infty$

(parte due) $\zeta(\alpha) < \infty$ se $\alpha > 1$

$$\sum_{1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right)}^{2^1} + \overbrace{\left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right)}^{2^2} + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n - 1)^\alpha}\right)}^{2^{n-1}} + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right)}^{2^n}$$

termini

$$1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

sia $x = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \Rightarrow 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$$

(Metodo di Cauchy)

se $\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \zeta\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$