## Capitolo 0

# Nozioni preliminari

In questo capitolo sono raccolte alcune nozioni che hanno carattere preliminare non solo a un corso di analisi, ma anche a un qualsiasi corso elementare di matematica. Premesse alcune semplici considerazioni di logica, si espongono i punti fondamentali della teoria degli insiemi. Come è noto, gli insiemi si prestano bene a essere impiegati come materia prima per tutte, o quasi tutte, le costruzioni della matematica d'oggi.

Questo capitolo ha una struttura e una presentazione diverse da quelle dei capitoli successivi; ha carattere più descrittivo che deduttivo. Alcune nozioni fondamentali sono assunte direttamente dalla nostra intuizione, sulla base di suggestioni fornite dal linguaggio comune; il nostro scopo, più che di fare un'indagine sui fondamenti della matematica, è quello di costruire un linguaggio abbastanza chiaro e preciso che possa servire da supporto per i successivi sviluppi.

## 1. Un po' di logica

Ogni teoria matematica ha una struttura ipotetico-deduttiva: assume alcune premesse e ne trae mediante ragionamento le conseguenze che interessano. Poiché tutti gli uomini, nella vita comune, ragionano — o, almeno, dovrebbero ragionare — non c'è, in via di principio, la necessità di fare uno studio preliminare sulla logica, che è appunto la scienza del ragionamento. Tuttavia è interessante per noi fare qualche riflessione in questo campo sia per chiarire alcune ambiguità del linguaggio comune, sia per mettere in luce alcuni procedimenti tipici che avremo occasione di applicare ripetutamente in seguito.

Lo studio della logica non si può compiere senza introdurre simboli appropriati che servano a rappresentare i nostri ragionamenti in modo preciso. Veramente, le notazioni che introdurremo, più che dar luogo a un linguaggio completamente formalizzato, costituiranno un'abbreviazione e una chiarificazione del linguaggio comune, ma anche a questo modesto livello ci saranno molto utili nello sviluppo del corso, soprattutto quando (come accade spesso in analisi) si dovranno affrontare ragionamenti un po' complicati.

Cominciamo con l'indicare con lettere (maiuscole, in corsivo calligrafico) certe *proposizioni*, o *affermazioni*. Ad esempio, possiamo convenire che:

"$\mathscr{A}$" significhi "*la rosa è un fiore*",
"$\mathscr{B}$" significhi "*il leone è un animale domestico*",
"$\mathscr{C}$" significhi "*in ogni triangolo, la somma degli angoli interni è un angolo piatto*" ecc.

Come si vede, tra le proposizioni che sono prese in considerazione, ve ne possono essere anche di false, ma è utile maneggiare le proposizioni prescindendo dal loro contenuto interno, e quindi dal fatto che possano o non possano essere dichiarate vere.

Una prima riflessione sul nostro linguaggio abituale ci porta a riconoscere che le proposizioni possono essere legate fra loro dando luogo a proposizioni più complesse; i termini di collegamento vengono detti *connettivi logici*. I più elementari sono i seguenti:

| "e" | "o" | "non" |
|---|---|---|
| (*congiunzione*) | (*disgiunzione*) | (*negazione*) . |

I connettivi "e" ed "o" sono binari, cioè si applicano a due proposizioni, mentre il connettivo "non" si applica a una sola.

Ad esempio, se $\mathscr{P}$ significa "soffia il vento" e $\mathscr{Q}$ "fa freddo", "$\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$" significa "soffia il vento e fa freddo", "$\mathscr{P}$ o $\mathscr{Q}$" significa "soffia il vento oppure fa freddo", "non $\mathscr{P}$" significa "non soffia il vento". Dunque, "$\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$" è vera solo se sono vere entrambe le proposizioni, "$\mathscr{P}$ o $\mathscr{Q}$" è vera se è vera almeno una delle due, "non $\mathscr{P}$" è falsa se $\mathscr{P}$ è vera, ed è vera se $\mathscr{P}$ è falsa.



Notiamo che nel linguaggio comune (almeno in italiano), non sempre la disgiunzione viene intesa nel senso che abbiamo fissato (che è quello debole); a volte la disgiunzione viene intesa in senso forte: cioè si esclude che le proposizioni in questione siano entrambe vere. Se io dico, ad esempio, "nuoto o annego" affermo che una delle due eventualità deve verificarsi, ed escludo che si verifichino entrambe.

Questi esempi mostrano che il linguaggio comune presenta ambiguità, come dicevamo. Spesso, nel linguaggio comune, è il significato della frase, o il contesto, a suggerirci l'interpretazione esatta.

Il nostro buon senso logico ci porta ad ammettere che, a volte, due diverse espressioni possano essere logicamente equivalenti e che, quindi, possano essere sostituite l'una all'altra ovunque esse ricorrano.

Ad esempio, noi ammettiamo che:

"$\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$" sia equivalente a "$\mathscr{Q}$ e $\mathscr{P}$", [1.1]

$\mathscr{P}$ sia equivalente a "non (non $\mathscr{P}$)" ; [1.2]

(la [1.2] è la legge della *doppia negazione*).

Così, ci convinciamo con esempi che:

"non ($\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$)" è da ritenersi equivalente a "(non $\mathscr{P}$) o (non $\mathscr{Q}$)", [1.3]

"non ($\mathscr{P}$ o $\mathscr{Q}$)" è da ritenersi equivalente a "(non $\mathscr{P}$) e (non $\mathscr{Q}$)" . [1.4]

Lo studioso noterà che vi è una certa simmetria nel comportamento dei connettivi "e" ed "o"; le regole scritte possono anzi permettere — volendo — di eliminare uno di questi connettivi: ad esempio, in luogo di "$\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$", possiamo scrivere: "non ((non $\mathscr{P}$) o (non $\mathscr{Q}$))".

Il compito fondamentale della logica è lo studio della deduzione; nel linguaggio comune c'è un connettivo che esprime la possibilità di compiere la deduzione: è il connettivo condizionale ("*se*" ... "*allora*"). Ad esempio, diciamo "*se soffia il vento,* (*allora*) *fa freddo*". Scriviamo dunque, dando a $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ il significato di prima, $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$; il simbolo $\Rightarrow$ viene detto connettivo di *implicazione*. È senz'altro conveniente introdurre questo segno. Tuttavia, esso può essere espresso mediante i connettivi precedenti. Infatti, si vuole che valga la seguente *regola di deduzione*:

*"Se è vera $\mathscr{P}$ e se è vera $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, è vera $\mathscr{Q}$"*.

Si vede subito che le cose vanno bene se il simbolo $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ si interpreta come "(non $\mathscr{P}$) o $\mathscr{Q}$" (infatti, se è vera quest'ultima ed è vera $\mathscr{P}$, essendo falsa la (non $\mathscr{P}$), è necessariamente vera la $\mathscr{Q}$).

Ad esempio, se si intende che:

$\mathscr{P}$ significa "l'intero $n$ è divisibile per 6",

$\mathscr{Q}$ significa "l'intero $n$ è pari",

allora è vera la $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$: infatti è vero che *"$n$ non è divisibile per 6 oppure $n$ è pari"*.

Il connettivo d'implicazione ci porta a costruire anche proposizioni vere, ma piuttosto strane rispetto al nostro linguaggio ordinario. Ad esempio, se conveniamo che:

$\mathscr{R}$ significhi "New York è la capitale della Francia",

$\mathscr{S}$ significhi "ogni triangolo ha tre lati",

è vera la proposizione $\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{S}$. In generale, se $\mathscr{R}$ è una proposizione falsa, $\mathscr{R} \Rightarrow \mathscr{S}$ è vera qualunque sia la proposizione $\mathscr{S}$. Del resto, anche i filosofi antichi avevano riconosciuto che da una premessa falsa si può dedurre tutto quello che si vuole. L'interpretazione del segno $\Rightarrow$ è stata data in modo tale che la proposizione $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ sia falsa solo quando $\mathscr{P}$ è vera e $\mathscr{Q}$ è falsa.

Queste semplici osservazioni sull'implicazione ci permettono di chiarire il nostro modo spontaneo di procedere nelle dimostrazioni per assurdo. Lo scopo è quello di dimostrare la verità di $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ ($\mathscr{P}$ viene detta *ipotesi*, $\mathscr{Q}$ viene detta *tesi*); sappiamo che $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ equivale a "(non $\mathscr{P}$) o $\mathscr{Q}$". Per la legge della doppia negazione, questa si può scrivere: "(non $\mathscr{P}$) o (non(non $\mathscr{Q}$))" o anche, cambiando l'ordine, "(non(non $\mathscr{Q}$)) o (non $\mathscr{P}$)", e si vede subito che questa si può scrivere (non $\mathscr{Q}$) $\Rightarrow$ (non $\mathscr{P}$). Dunque $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ è equivalente a (non $\mathscr{Q}$) $\Rightarrow$ (non $\mathscr{P}$).

*Esempio.* Per dimostrare che (detti $m$ ed $n$ due interi naturali) *"se il prodotto $m \cdot n$ è pari, uno dei due fattori è pari"*, è equivalente dimostrare che *"se $m$ ed $n$ sono dispari il loro prodotto $m \cdot n$ è dispari"*.



Spesso le dimostrazioni per assurdo prendono una forma più sofisticata. Per provare che $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ è vera, si ammette che $\mathscr{P}$ sia vera e $\mathscr{Q}$ sia falsa (cioè che sia vera (non $\mathscr{Q}$)) e si procede nelle deduzioni finché non si arriva a una proposizione falsa $\mathscr{R}$ (cioè a una proposizione $\mathscr{R}$ tale che (non $\mathscr{R}$) sia vera; ciò accade quando $\mathscr{R}$ è una contraddizione, cioè una proposizione del tipo "$\mathscr{S}$ e (non $\mathscr{S}$)"). In termini più precisi, ammettiamo dunque di avere dimostrato la verità dell'implicazione ($\mathscr{P}$ e (non $\mathscr{Q}$)) $\Rightarrow \mathscr{R}$; per quello che abbiamo detto sopra, questa si può scrivere (non $\mathscr{R}$) $\Rightarrow$ ((non $\mathscr{P}$) o $\mathscr{Q}$), oppure anche (non $\mathscr{R}$) $\Rightarrow$ ($\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$). Ma (non $\mathscr{R}$) è vera; perciò, per la nostra regola di deduzione è vera la $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

*Esempio. Sia $t$ una retta, $A$ un punto fuori di essa e siano $l$ ed $m$ due rette passanti per $A$ e perpendicolari a $t$; allora $l$ ed $m$ coincidono.* Per dimostrarlo, secondo lo schema ora esposto, accettiamo l'ipotesi, ma neghiamo la tesi; supponiamo dunque che $l$ ed $m$ siano distinte: esse taglieranno $t$ in due punti distinti $L$ ed $M$. Ma allora il triangolo $LMA$ ha due angoli retti e si sa che nella geometria euclidea (anche prescindendo dal postulato delle parallele) questa affermazione è falsa.

Introduciamo un altro simbolo utile: la doppia implicazione.

Scriviamo $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ come equivalente a [($\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$) e ($\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$)]; ad esempio, supponiamo che $\mathscr{P}$ significhi *"il triangolo $T$ ha due lati uguali"* e $\mathscr{Q}$ significhi *"il triangolo $T$ ha due angoli uguali"*. Allora, come è noto, è vera la proposizione $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$. Spesso la proposizione $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ si legge *"$\mathscr{P}$ è condizione necessaria e sufficiente perché accada $\mathscr{Q}$"*. Evidentemente, $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ si può leggere *"$\mathscr{P}$ è sufficiente perché accada $\mathscr{Q}$"* e $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ si può leggere *"$\mathscr{P}$ è condizione necessaria perché accada $\mathscr{Q}$"*. Se la proposizione $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ è vera, allora $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.

Il segno $\Leftrightarrow$ permette di rappresentare in modo preciso quell'equivalenza logica che all'inizio abbiamo introdotto solo in forma vaga.

Ad esempio le [1.1] e [1.2] si possono così rappresentare:

$$\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{Q} \Leftrightarrow \mathscr{Q} \text{ e } \mathscr{P} \qquad \mathscr{P} \Leftrightarrow \text{non (non } \mathscr{P}) \, ;$$

analogamente, le [1.3] e [1.4] si possono scrivere:

$$\text{non } (\mathscr{P} \text{ e } \mathscr{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathscr{P}) \text{ o } (\text{non } \mathscr{Q}) \, ,$$

$$\text{non } (\mathscr{P} \text{ o } \mathscr{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathscr{P}) \text{ e } (\text{non } \mathscr{Q}) \, .$$

Queste quattro espressioni sono *tautologie*, cioè proposizioni vere quali che siano le proposizioni $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ che compaiono nella loro espressione.

La logica delle proposizioni, di cui abbiamo dato solo pochi cenni, ci fornisce un linguaggio troppo povero per le esigenze anche più elementari della matematica; occorre generalizzare la nozione di proposizione introducendo certe espressioni logiche contenenti delle *variabili*. Ad esempio, l'espressione

$x > 1$ (intendendo che $x$ rappresenti un numero reale)

contiene la variabile $x$; la sua verità dipende dai valori che attribuiamo alla $x$; essa diviene una proposizione vera sostituendo a $x$ il simbolo 3, una proposizione falsa sostituendo a $x$ il simbolo 0. Si dicono *predicati* le espressioni di questo tipo; esse si indicano con una lettera (per noi sarà una lettera maiuscola, in corsivo calligrafico) seguita da una o più lettere minuscole entro parentesi; queste indicano le variabili (saranno scelte fra le ultime lettere dell'alfabeto). Ad esempio, possiamo porre:

$\mathscr{H}(x)$ per dire "*x è un uomo onesto*",

$\mathscr{L}(x, y)$ per dire "*x è un uomo capace di fare il lavoro y*",

$\mathscr{P}(x, y, z)$ per dire "*il prodotto del numero x per il numero y dà il numero z*".

Spesso si dice anche che il predicato (in una variabile) $\mathscr{H}(x)$ esprime una *proprietà* di $x$, che il predicato (in due variabili) $\mathscr{L}(x, y)$ esprime una *relazione* fra $x$ e $y$ ecc.

Fra i predicati possiamo anche includere quelli che non contengono alcuna variabile; essi si identificano con le proposizioni, che abbiamo già considerato (in questo senso la "logica dei predicati" contiene la "logica delle proposizioni").

Nella logica dei predicati è opportuno anche introdurre altre lettere minuscole per indicare le *costanti*; in ogni teoria matematica vi sono certi enti particolari, che possono eventualmente essere sostituiti in luogo delle variabili (esempio: l'elemento neutro nella teoria dei gruppi, lo 0 nella teoria degli interi naturali, il numero 2, il numero $\pi$ ecc.).

Come abbiamo visto sopra, quando in un predicato tutte le variabili vengono sostituite con costanti, si ottiene una proposizione: ad esempio, dalla relazione $x > y$, si ottiene per sostituzione la proposizione (vera) $\pi > 3$.



Un'altra via per trasformare un predicato in una proposizione è l'applicazione di uno o più *quantificatori*. I quantificatori sono due:

$\exists$ (quantificatore esistenziale), $\forall$ (quantificatore universale).

Il loro significato e il loro impiego sono chiaramente spiegati da questi esempi:

$\exists x$: $\mathscr{H}(x)$ significa "*esiste almeno un x tale che è vera* $\mathscr{H}(x)$" (col significato di prima: "*esiste almeno un uomo onesto*");

$\forall x$: $\mathscr{H}(x)$ significa "*per tutti gli x è vera* $\mathscr{H}(x)$" (col significato di prima: "*tutti gli uomini sono onesti*").

Come verifica consideriamo questi altri esempi, in cui si sottintende che $x$ indica un numero reale:

$$\exists x\colon x^2 \geq 1 \text{ (è vera)}, \qquad \forall x\colon x^2 \geq 1 \text{ (è falsa)},$$

$$\forall x\colon x^2 \geq 0 \text{ (è vera)}, \qquad \exists x\colon x^2 < 0 \text{ (è falsa)}.$$

Notiamo che, applicato un quantificatore a $x$, otteniamo una relazione che non dipende più effettivamente dalla lettera $x$ (questa è diventata variabile "legata" o "muta"). Se il predicato contiene più variabili, solo dopo che ciascuna variabile sarà stata sostituita con una costante, oppure trasformata in variabile legata mediante l'applicazione di un quantificatore, il predicato sarà diventato una proposizione. Ad esempio, l'espressione

$$\forall y \; \exists x\colon \mathscr{L}(x, y)$$

è una proposizione; col significato attribuito al predicato $\mathscr{L}$, essa si interpreta "*qualunque sia il lavoro y, c'è un uomo che lo sa fare*". Nel caso in cui (come ora) si impieghino più quantificatori di tipo diverso, occorre fare attenzione all'ordine con cui si applicano. Ad esempio

$$\exists x \; \forall y\colon \mathscr{L}(x, y)$$

è una proposizione che significa "*c'è un uomo che sa fare qualsiasi lavoro*".

Come si vede, lo scambio dei quantificatori ha alterato completamente il significato della frase.

Enunciamo ancora un'importante regola che riguarda la negazione di proposizioni costruite con impiego di quantificatori: essa è espressa mediante la seguente tautologia:

$$\text{non } (\forall x\colon \mathscr{H}(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon (\text{non } \mathscr{H}(x)) \; ; \qquad [1.5]$$

(negare che tutti gli uomini siano onesti equivale ad affermare che esiste qualche uomo disonesto). E, simmetricamente:

$$\text{non } (\exists x\colon \mathscr{H}(x)) \Leftrightarrow \forall x\colon (\text{non } \mathscr{H}(x)) \; ; \qquad [1.6]$$

(negare che esista qualche uomo onesto è come affermare che tutti gli uomini sono disonesti). In conclusione, la negazione può essere portata oltre il segno di quantificatore, cambiando il quantificatore in quello di tipo opposto.

Le regole logiche che abbiamo esposto possono apparire del tutto ovvie, e lo sono; si deve osservare peraltro che la maggior parte degli errori che si commettono in matematica (e in analisi in particolare) sono violazioni di queste regole.

Per concludere, fra i simboli logici (simboli che sono di portata generale e perciò comuni a tutte le teorie matematiche) è opportuno inserire anche il simbolo di *uguaglianza*. Esso dà luogo a una relazione (cioè un predicato con due variabili) che si scrive $x = y$. Questa relazione esprime il fatto che $x$ e $y$ sono intercambiabili a tutti gli effetti, cioè, se $\mathscr{R}$ è un predicato qualsiasi in una variabile, allora è vero che

$$\forall x \; \forall y\colon \; x = y \;\Rightarrow\; (\mathscr{R}(x) \Leftrightarrow \mathscr{R}(y)) \, .$$

Valgono per l'uguaglianza le seguenti proprietà:

$$\forall x\colon \; x = x \quad \text{(proprietà riflessiva)},$$

$$\forall x \; \forall y\colon \; x = y \;\Rightarrow\; y = x \quad \text{(proprietà simmetrica)},$$

$$\forall x \; \forall y \; \forall z\colon \; (x = y) \text{ e } (y = z) \;\Rightarrow\; x = z \quad \text{(proprietà transitiva)}.$$

La negazione della relazione $x = y$ si scrive, secondo una ben nota convenzione, $x \neq y$.

Nel seguito useremo spesso il segno di uguaglianza anche per porre definizioni: ad esempio il numero $e$ (come si vedrà più avanti) può essere definito così:

$$e \underset{def}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Il segno di uguaglianza ci dà modo dunque di sostituire una espressione nota, ma complessa, con un solo simbolo; il segno "*def*" che spesso si mette in questi casi sotto il segno di uguaglianza, non è logicamente indispensabile, ma serve a fare capire la motivazione di ciò che si scrive.

A conclusione di queste brevi osservazioni sulla logica, riteniamo doveroso aggiungere che la logica è uno strumento essenziale per l'indagine matematica ma non la esaurisce. Infatti, in primo luogo, in ogni teoria matematica vi è la scelta iniziale degli assiomi, che non è una pura questione di logica. In secondo luogo, fra tutte le deduzioni possibili, il matematico persegue solo quelle che sono significative, guidato da esigenze di tipo estetico o pratico; l'intuizione (fondata sull'esperienza fisica, sull'analogia con teorie già note ecc.) suggerisce al matematico gli enunciati plausibili, e i ragionamenti che possono essere impiegati per dimostrarli.



## Esercizi

1. Rappresentare, mediante i connettivi introdotti, la disgiunzione *forte* di due proposizioni $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$.

2. Trovare un'espressione logica dipendente da tre proposizioni $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$, che sia vera quando due almeno di esse sono vere.

*3. La logica stessa può essere studiata col metodo deduttivo. Ad esempio (limitandoci alla logica delle proposizioni), si possono accettare alcune tautologie, come assiomi logici e cercare di dedurre da esse tutte le altre: ad esempio, si possono accettare le seguenti quattro:

$$(\mathscr{P} \text{ o } \mathscr{P}) \Rightarrow \mathscr{P}, \qquad \mathscr{P} \Rightarrow (\mathscr{P} \text{ o } \mathscr{Q}),$$

$$(\mathscr{P} \text{ o } \mathscr{Q}) \Rightarrow (\mathscr{Q} \text{ o } \mathscr{P}), \qquad (\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow ((\mathscr{R} \text{ o } \mathscr{P}) \Rightarrow (\mathscr{R} \text{ o } \mathscr{Q})),$$

Partendo da queste, e applicando sempre la regola di deduzione, si dimostrino le seguenti tautologie:

$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow ((\mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{P}) \Rightarrow (\mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{Q}))$ (proprietà transitiva dell'implicazione),

$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}$,

$\mathscr{P} \Rightarrow$ non (non $\mathscr{P}$),

$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \Rightarrow$ ((non $\mathscr{Q}$) $\Rightarrow$ (non $\mathscr{P}$));

(la scrittura $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ deve essere sempre ritenuta equivalente a "(non $\mathscr{P}$) o $\mathscr{Q}$").

## 2. Gli insiemi

In questa esposizione assumiamo come primitiva l'idea di *insieme*, così come ce la presenta la nostra intuizione. Al lettore sono certamente familiari espressioni come "l'insieme degli interi naturali", "l'insieme delle rette del piano" ecc. Consideriamo anche i termini di *aggregato, classe, famiglia* come sinonimi di *insieme*.

L'espressione

$$x \in T \qquad [2.1]$$

si legge: *x appartiene all'insieme T* o, indifferentemente, *x è un elemento di T*. Ad esempio, se indichiamo con $\mathsf{R}$ l'insieme di tutti i numeri reali, è vero che $\sqrt{2} \in \mathsf{R}$.

Scriveremo $x \notin T$ per negare la [2.1], cioè per affermare che $x$ non appartiene a $T$.

L'intuizione ci suggerisce di considerare uguali due insiemi che abbiano gli stessi elementi; in simboli:

$$(\forall x\colon\ x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B. \qquad [2.2]$$

Il significato che abbiamo dato al segno di eguaglianza ci assicura che due insiemi aventi gli stessi elementi devono avere il medesimo ruolo in tutte le enunciazioni che fanno parte della nostra teoria.

Per indicare un insieme basterà allora (quando è possibile) elencarne gli elementi; converremo di elencarli entro parentesi graffe. Ad esempio, $\{2, 5, 6\}$ indica l'insieme i cui elementi sono i numeri 2, 5, 6. La notazione $\{2\}$ indica l'insieme costituito dal solo elemento 2: nella nostra teoria, preso un qualsiasi oggetto $a$, ci riserviamo il diritto di considerare l'insieme $\{a\}$ che ha come



unico elemento $a$; occorre fare bene attenzione a non confondere $a$ con $\{a\}$...

Se ogni elemento di $A$ è un elemento di $B$, cioè:

$$\forall x\colon\ x \in A \Rightarrow x \in B, \qquad [2.3]$$

allora diciamo che $A$ è *contenuto* in $B$ (fig. 2.1), oppure $A$ è una *parte* o un *sottoinsieme* di $B$, e scriviamo $A \subset B$. Questa relazione è detta di *inclusione*. Notiamo che la relazione $A \subset B$ è verificata quando è $A = B$. Per esprimere che è $A \subset B$, ma è $A \neq B$, cioè esistono elementi di $B$ che non sono elementi di $A$, si scrive $A \subsetneq B$ (si dice allora che $A$ è *sottoinsieme proprio* di $B$, ovvero è *propriamente contenuto* in $B$).

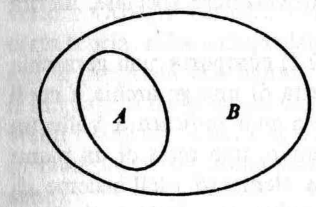


Figura 2.1

Conviene introdurre un particolare insieme privo di elementi, che verrà detto insieme *vuoto*.

Poiché gli insiemi si distinguono solo in base ai loro elementi, e l'insieme vuoto... non ne ha, si deve ritenere che esiste un unico insieme vuoto; esso verrà indicato col simbolo $\varnothing$. L'insieme vuoto è molto utile nello sviluppo formale della teoria degli insiemi, come vedremo tra poco.

Poste queste premesse, il compito che ci spetta in questo paragrafo e nei successivi è quello di esporre alcune importanti costruzioni insiemistiche, cioè procedimenti che, partendo da insiemi assegnati, ci forniscono nuovi insiemi.

*2.1 *Osservazione.* Nell'introdurre la nozione di insieme ci siamo basati solo sulla suggestione della nostra intuizione. Accenniamo ora, per sommi capi, al modo con cui si può costruire una teoria assiomatica degli insiemi, cioè una teoria che si basi solo su alcune proposizioni primitive espresse nel linguaggio logico (assiomi).

Oltre ai simboli logici, la nostra teoria deve contenere il simbolo $\in$ che, come risulta dalla [2.1] esprime una relazione, cioè un predicato in due variabili. (Naturalmente, la [2.1] deve essere intesa in modo puramente formale, prescindendo dal significato intuitivo che può esprimere.) Altri predicati si possono derivare da $\in$ mediante un'opportuna definizione (si pensi, ad esempio, alla relazione $A \subset B$, espressa dalla [2.3]). Dunque, la relazione $\in$ può essere posta a fondamento di tutta la teoria degli insiemi; gli assiomi della teoria degli insiemi non fanno che assegnare le proprietà formali della relazione $\in$.

Come abbiamo detto, non esporremo per esteso gli assiomi della teoria degli insiemi, volendo mantenerci a un livello intuitivo: formuleremo solo in modo esplicito, più avanti, un assioma (l'assioma della scelta) che, per il suo carattere speciale, merita di essere segnalato a parte.[1]

Notiamo ancora che la relazione [2.1] comporta una gerarchia tra elemento e insieme; ma non si tratta di una gerarchia a ruoli fissi: in altre parole, una stessa lettera può indicare a volte un elemento, a volte un insieme. Ad esempio, una retta di un piano può essere considerata a volte come elemento (dell'insieme di tutte le rette del piano, ad esempio), a volte come insieme (insieme di tutti i suoi punti). Osserviamo poi che nella [2.1] e nella [2.2] si usano le lettere maiuscole per indicare gli insiemi, le lettere minuscole per indicare gli elementi: questo artificio grafico è utile per facilitare la comprensione (e noi lo useremo, in seguito, tutte le volte che potremo) ma è evidente, da quanto detto, che esso non ha alcun fondamento concettuale! Aggiungiamo, infine, che, in una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi, è comodo avere a che fare con enti di uno stesso tipo, e cioè solo con insiemi: si fa allora in modo (sia pure un po' artificiosamente) che ogni elemento di un qualsiasi insieme possa, a sua volta, essere considerato come un insieme.

Supponiamo che $T$ sia un insieme e che $\mathscr{P}(x)$ sia una proprietà che ha senso per gli elementi di $T$; allora scriviamo

$$\{x\colon (x \in T) \text{ e } \mathscr{P}(x)\} \qquad [2.4]$$

[1] La situazione ha qualche analogia con quella che si trova in geometria elementare per l'assioma delle parallele, che non manca di contenuto intuitivo, ma è, in un certo senso, meno centrale degli altri.



per indicare il sottoinsieme di $T$ formato dagli elementi per cui $\mathscr{P}(x)$ è vera.

Ad esempio, l'espressione

$$\{x\colon (x \in \mathsf{R}) \text{ e } (\sin x = 0)\}$$

rappresenta l'insieme dei multipli interi di $\pi$.

*2.2 *Osservazione.* Naturalmente, il fatto che la [2.4] rappresenti un insieme dovrebbe essere postulato, cioè posto come assioma. Lo studioso avrà poi notato che abbiamo parlato di "proprietà che ha senso"; è chiaro che occorre prendere qualche precauzione, dal momento che non avrebbe senso, ad esempio, parlare del "sottoinsieme di R (retta reale) costituito dai numeri verdi". Occorre peraltro rendersi conto che quando si è in una certa teoria, si ha a disposizione solo il linguaggio di quella teoria: qui le proprietà che hanno senso sono quelle espresse attraverso il linguaggio della teoria degli insiemi (e quindi, se si vuole, attraverso i simboli logici e il simbolo $\in$, magari con una lunga serie di manipolazioni, come sarebbe per la definizione della funzione seno).

*2.3 *Osservazione.* L'espressione [2.4] permette di definire un insieme, avendo però a disposizione un insieme $T$ già assegnato. Se non prendiamo questa precauzione, cioè se consideriamo semplicemente, in luogo della [2.4] un'espressione del tipo $\{x\colon \mathscr{P}(x)\}$, non possiamo pretendere che questa rappresenti un insieme, anche se la proprietà $\mathscr{P}(x)$ è espressa nel linguaggio della teoria degli insiemi. Costatiamolo con un esempio: ammettiamo per un momento che l'espressione $\{x\colon x \notin x\}$ rappresenti un insieme $s$. (Questo sarebbe dunque "*l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono sé stessi come elementi*".) È chiaro che se è $s \in s$, allora deve essere $s \notin s$ (perché $x \notin x$ è la proprietà caratteristica di $s$), mentre se è $s \notin s$, allora, per questo stesso fatto, dovrebbe essere $s \in s$. Dunque, l'avere ammesso che $\{x\colon x \notin x\}$ rappresenti un insieme conduce a un paradosso (è il celebre paradosso di Russell).

Notiamo poi che nelle usuali presentazioni assiomatiche della teoria degli insiemi si esclude che un insieme possa contenere sé stesso come elemento (in conformità di quella gerarchia elemento-insieme a cui abbiamo fatto cenno nell'osservazione 2.1).

Dunque, se la proprietà $x \notin x$ dovesse definire un insieme, questo sarebbe "*l'insieme di tutti gli insiemi*": il paradosso di Russell, ci porta allora a riconoscere l'impossibilità di un tale insieme; in altre parole, nella teoria degli insiemi non ci può essere un "universo".

Infine notiamo che, nei casi concreti, l'indicazione dell'insieme $T$ nella [2.4] può essere sottintesa; in molte questioni di analisi può essere sottinteso, ad esempio, che $T$ coincide con la retta reale, o con il piano complesso ecc.

Esponiamo ora alcune fondamentali operazioni insiemistiche che si possono definire direttamente mediante la relazione di appartenenza.

1) *Unione.* L'unione di due insiemi $A, B$ è l'insieme formato da quegli elementi che appartengono a uno almeno dei due insiemi $A, B$ (fig. 2.2). Esso viene indicato con $A \cup B$. In simboli:

$$A \cup B \underset{def}{=} \{x\colon (x \in A) \text{ o } (x \in B)\}. \qquad [2.5]$$

*2.4 *Osservazione.* Il secondo membro della [2.5] non rientra nella forma dell'espressione [2.4]. Perciò, in una formulazione precisa occorrerebbe anzitutto affermare con un assioma che il secondo membro della [2.5] rappresenta un insieme.

2) *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi $A, B$ è l'insieme formato degli elementi che appartengono sia ad $A$ che a $B$ (fig. 2.3). Esso si indica con il simbolo $A \cap B$:

$$A \cap B \underset{def}{=} \{x\colon (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}. \qquad [2.6]$$

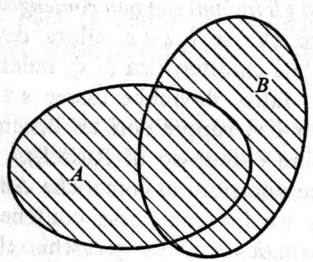


Figura 2.2

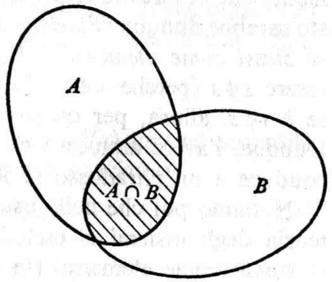


Figura 2.3



Può accadere che i due insiemi $A, B$ siano *disgiunti* (cioè non abbiano alcun elemento in comune). Allora si scrive: $A \cap B = \varnothing$.

3) *Differenza.* La differenza di $B$ da $A$, che si indica con $A \setminus B$, oppure con $A - B$, è l'insieme degli elementi di $A$ che non appartengono a $B$ (fig. 2.4). In simboli:

$$A \setminus B \underset{def}{=} \{x\colon (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}. \qquad [2.7]$$

4) *Differenza simmetrica.* La differenza simmetrica $A, B$ che si indica col simbolo $A \Delta B$ è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a uno solo degli insiemi $A, B$ (fig. 2.5), cioè

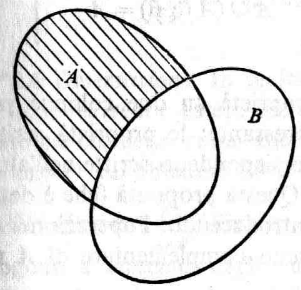


Figura 2.4

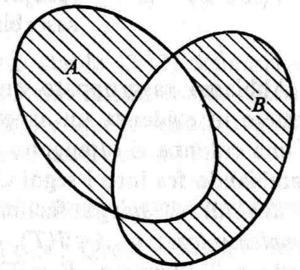


Figura 2.5

dagli elementi di $A$ che non appartengono a $B$ e dagli elementi di $B$ che non appartengono ad $A$. Perciò

$$A \Delta B \underset{def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \qquad [2.8]$$

Dato un insieme $T$, ammettiamo di poter considerare un insieme i cui elementi sono tutte le parti (o sottoinsiemi) di $T$; questo insieme verrà indicato con $\mathfrak{T}(T)$. Ad esempio, se è $T = \{a, b, c\}$, si ha:

$$\mathfrak{T}(T) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Le operazioni $\cup$ e $\cap$, nell'insieme $\mathfrak{T}(T)$, hanno proprietà formali molto interessanti. Elenchiamone alcune:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A \cup A = A$ | (proprietà di idempotenza) | $A \cap A = A$ | [2.9] |
| $A \cup B = B \cup A$ | (proprietà commutativa) | $A \cap B = B \cap A$ | |
| $(A \cup B) \cup C =$ $= A \cup (B \cup C)$ | (proprietà associativa) | $(A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C)$ | |
| $A \cup (B \cap C) =$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | (proprietà distributiva di una operazione rispetto all'altra) | $A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | |
| $A \cap (A \cup B) = A$ | (proprietà di assorbimento) | $A \cup (A \cap B) = A$ | |

Abbiamo raggruppato queste proprietà su due colonne per mettere in evidenza un aspetto interessante: le proprietà scritte in una colonna si ottengono dalle corrispondenti scritte nell'altra scambiando fra loro i segni $\cup$ e $\cap$. Questa proprietà (che è detta di *dualità*) si spiega facilmente introducendo l'operazione di *complementare*: se $A \in \mathfrak{P}(T)$, chiamiamo complementare di $A$ rispetto a $T$ l'insieme $A' \underset{def}{=} T \setminus A$.

Valgono allora le seguenti proprietà:

$$(A')' = A\,, \tag{2.10}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'\,, \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'\,. \tag{2.11}$$

Notiamo anzitutto che la [2.10] permette di ricavare una delle [2.11] dall'altra (si sostituisca in luogo di $A$, $A'$, in luogo di $B$, $B'$, e si prenda il complementare di ambo i membri). Con analoga tecnica si dimostrano le relazioni contenute in una delle colonne della [2.9], partendo dalle corrispondenti dell'altra colonna.

*2.5 *Osservazione*. Si dice *algebra di Boole* la struttura che si ottiene assegnando in un insieme (nel nostro caso $\mathfrak{P}(T)$) tre operazioni: $\cup$, $\cap$, $'$, aventi le proprietà [2.9], [2.10], [2.11]. È interessante notare che le proprietà [2.9], [2.10], [2.11] valgono anche per la logica delle proposizioni, pur di sostituire il simbolo $\cup$ con il connettivo "o", il simbolo $\cap$ con il connettivo "e", il simbolo $'$ con il connettivo "non", sostituendo poi il simbolo $=$ con il connettivo $\Leftrightarrow$ (di doppia implicazione). Questo, del resto non fa meraviglia se si pensa al modo con cui sono state definite la relazione di eguaglianza fra gli insiemi, e le operazioni insiemistiche (vedi le [2.2], [2.5], [2.6], [2.7]).



Le operazioni di unione e di intersezione si possono estendere al caso di famiglie infinite di insiemi.

Sia $\mathscr{F}$ una famiglia qualunque di insiemi; si indica con $\bigcup\limits_{X \in \mathscr{F}} X$ l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a *qualcuno* degli insiemi $X \in \mathscr{F}$. Questo insieme viene detto *insieme-unione* della famiglia $\mathscr{F}$. In simboli:

$$\bigcup_{X \in \mathscr{F}} X = \{x\colon (\exists X\colon X \in \mathscr{F} \text{ e } x \in X)\}\,. \tag{2.12}$$

*2.6 *Osservazione*. In realtà, il fatto che la [2.12] definisca un insieme dovrebbe essere un assioma della nostra teoria. Questo assioma contiene come caso particolare quello relativo a due insiemi (a cui abbiamo fatto cenno nell'osservazione 2.3).

Si indica con $\bigcap\limits_{X \in \mathscr{F}} X$ l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a *ciascuno* degli insiemi $X \in \mathscr{F}$. Questo insieme viene detto *insieme-intersezione* della famiglia $\mathscr{F}$. In simboli:

$$\bigcap_{X \in \mathscr{F}} X = \{x\colon (\forall X\colon X \in \mathscr{F} \Rightarrow x \in X)\}\,. \tag{2.13}$$

Le considerazioni generali che abbiamo fatto negli insiemi ci porgono l'occasione di una riflessione sui procedimenti che si seguono abitualmente per risolvere le equazioni. Sia $T$ un insieme e sia $\mathscr{P}(x)$ un predicato che abbia senso in $T$; possiamo interpretare $\mathscr{P}(x)$ come un'*equazione* posta in $T$. L'insieme: $P = \{x\colon (x \in T) \text{ e } \mathscr{P}(x)\}$ è evidentemente l'insieme delle *soluzioni* di $\mathscr{P}(x)$ in $T$. Il punto di vista da cui ci poniamo in questa presentazione è molto generale: nel nostro concetto di equazione rientrano, ad esempio, anche quelle che comunemente vengono dette disequazioni, e tante altre cose.

Sia ora $\mathscr{Q}(x)$ un secondo predicato e sia $Q = \{x\colon (x \in T) \text{ e } \mathscr{Q}(x)\}$; se per ogni $x \in T$ è vera la $\mathscr{P}(x) \Rightarrow \mathscr{Q}(x)$, allora (vedi la [2.3]) si ha $P \subset Q$. In pratica, si cerca $\mathscr{Q}(x)$ tale che l'insieme delle soluzioni $Q$ sia facilmente determinabile. Dunque, $Q$ contiene tutte le soluzioni dell'equazione $\mathscr{P}(x)$, ma può contenere altri elementi. Ad esempio supponiamo che $T$ sia la retta reale e che $\mathscr{P}(x)$ significhi $\sqrt{x^2+1} = 2x$ e $\mathscr{Q}(x)$ significhi $x^2+1 = 4x^2$. Allora, per ogni $x$ è vera $\mathscr{P}(x) \Rightarrow \mathscr{Q}(x)$. Si ha $Q = \{1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\}$ ma il valore $-1/\sqrt{3}$ non verifica la $\mathscr{P}(x)$.

Il lettore sa già che certe manipolazioni di carattere algebrico possono introdurre "*soluzioni estranee*"; da quanto abbiamo detto sopra risulta chiaramente il carattere generale di questo fenomeno.

Se invece, per ogni $x \in T$ è vera $\mathscr{P}(x) \Leftrightarrow \mathscr{Q}(x)$, allora è $P = Q$; le due equazioni hanno le stesse soluzioni, e si dicono equivalenti.

Concludiamo questo paragrafo con alcune convenzioni a cui ci atterremo in seguito per quello che riguarda l'impiego dei quantificatori nella teoria degli insiemi.

Per dire che tutti gli elementi di un insieme $T$ hanno una proprietà $\mathscr{P}(x)$, anziché impiegare la scrittura esatta $\forall x\colon (x \in T) \Rightarrow \mathscr{P}(x)$, scriveremo più brevemente:

$$\forall x \in T\colon\ \mathscr{P}(x)\,. \tag{2.14}$$

Analogamente, per affermare che in $T$ c'è almeno un elemento avente la proprietà $\mathscr{P}(x)$, anziché scrivere $\exists x\colon (x \in T)$ e $\mathscr{P}(x)$, scriveremo:

$$\exists x \in T\colon\ \mathscr{P}(x)\,. \tag{2.15}$$

Esercizi

1. Scrivere, in luogo di ..., il segno $\in$, o il segno $\subset$ (o anche ambedue):

$$a \ldots \{a\},\quad \{a\} \ldots \{a, b\},\quad a \ldots \{a, \{a\}, b\},\quad \varnothing \ldots \{a\},$$
$$\{a\} \ldots \{a, \{a\}, b\},\quad \{a, b\} \ldots \{b, a\},\quad \varnothing \ldots \varnothing\,.$$

2. Di quanti elementi consta l'insieme $\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(\varnothing)))$?

3. Si dimostri che $((A \subsetneq B)$ e $(B \subset C)) \Rightarrow A \subsetneq C$.

4. Si dimostri che $(A \Delta B = \varnothing) \Leftrightarrow (A = B)$.

5. Si rappresentino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$:

$$\{x\colon -2 \leqslant 3x \leqslant 5\}\,,\quad \{x\colon (x-1)^2 \leqslant (2x-1)^2 - 4\}\,,$$
$$\{x\colon x \geqslant 8,\ \sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} < 5\}\,.$$



6. È vero che $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \neq B$?

*7. Si dimostri che $((A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow C \subset A$.

8. Si dimostrino le seguenti regole, del tutto evidenti per il buon senso logico, che riguardano la negazione delle [2.14] e [2.15]:

$$\text{non}\,(\forall x \in T\colon \mathscr{P}(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in T\colon (\text{non}\ \mathscr{P}(x))\,,$$
$$\text{non}\,(\exists\, x \in T\colon \mathscr{P}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in T\colon (\text{non}\ \mathscr{P}(x))\,,$$

(Si partirà dalle [1.5] e [1.6], tenendo presente il significato delle [2.14] e [2.15].)

## 3. L'insieme-prodotto; relazioni; applicazioni

Introduciamo ora un'altra costruzione fondamentale della teoria degli insiemi: quella dell'insieme - prodotto di due insiemi.

Anzitutto, assumiamo come primitiva la nozione di *coppia* (ordinata); per suscitarla in modo preciso nella nostra intuizione, pensiamo di avere a disposizione due caselle (la prima e la seconda casella) e di inserire in esse, rispettivamente, due elementi non necessariamente distinti $x$ e $y$; per indicare la coppia così ottenuta useremo la notazione $(x, y)$.

È evidente che bisogna guardarsi dal confondere la coppia $(x, y)$ con l'insieme $\{x, y\}$ costituito dagli elementi $x$ e $y$. Infatti si ha $\{x, y\} = \{y, x\}$ (per gli insiemi non ha rilevanza l'ordine con cui sono elencati gli elementi), mentre per le coppie si ha:

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'\,. \tag{3.1}$$

Siano ora dati due insiemi $A$ e $B$. Diremo *insieme - prodotto di $A$ per $B$*, e indicheremo con $A \times B$ l'insieme di tutte le coppie $(x, y)$, con $x \in A$, $y \in B$. In simboli:

$$A \times B \underset{def}{=} \{(x, y)\colon\ x \in A,\ y \in B\}\,.$$

Notiamo che non abbiamo richiesto ai due insiemi $A$ e $B$ di essere diversi. Un ben noto esempio di prodotto è $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, dove $\mathbf{R}$ indica la retta reale. La geometria analitica ci insegna a rappresentare biunivocamente il piano mediante l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali (fig. 3.1), cioè mediante $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Perciò l'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, che comunemente viene scritto $\mathbf{R}^2$, viene detto anche *piano* (numerico).

*3.1 *Osservazione*. Si può evitare di assumere la nozione di coppia come primitiva, pur di accettare una definizione un po' artificiosa. Si può infatti porre: $(x, y) \underset{def}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Quello che

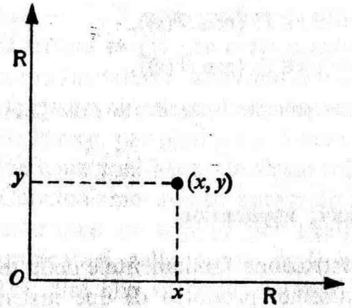

Figura 3.1

importa, è che, con questa definizione, viene soddisfatta la condizione espressa dalla [3.1] (lasciamo al lettore il compito di verificarlo). Una coppia $(x, y)$, con $x \in A$, $y \in B$ è allora un sottoinsieme di $\mathfrak{P}(A \cup B)$ e, perciò, un elemento di $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$. Quindi, il prodotto si può definire così:

$$A \times B = \{z:\ z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)) \text{ e } (\exists x \in A, \exists y \in B:\ z = \{\{x\}, \{x, y\}\})\}.$$

Si tratta di un'espressione un po' macchinosa, che però ha il vantaggio di presentare $A \times B$ come sottoinsieme di un insieme ben determinato (vedi la [2.4] e l'osservazione 2.3). Dunque, per questa via, non c'è bisogno né d'introdurre un'altra nozione primitiva, né d'introdurre un altro assioma che postuli l'esistenza dell'insieme-prodotto.

Dati, in un certo ordine, tre insiemi $A, B, C$, si chiama loro prodotto, e si indica con $A \times B \times C$ l'insieme di tutte le *terne* ordinate $(x, y, z)$ con $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. La definizione si estende in modo ovvio al caso di un numero finito qualsiasi di spazi; ad esempio, si indica con $\mathsf{R}^n$ l'insieme di tutte le $n$-uple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numeri reali. Il prodotto di più insiemi può essere introdotto, peraltro, utilizzando solo il prodotto di due insiemi; è facile vedere infatti che $A \times B \times C$ si può introdurre indifferentemente come $(A \times B) \times C$, oppure come $A \times (B \times C)$.



Abbiamo già usato il termine "relazione" per indicare un predicato in due variabili. Sia ora $\mathscr{R}(x, y)$ una relazione che abbia senso nella teoria degli insiemi. Possiamo allora considerare l'insieme

$$\{(x, y):\ (x, y) \in A \times B \text{ e } \mathscr{R}(x, y)\} \qquad [3.2]$$

cioè il sottoinsieme di $A \times B$ costituito da tutte le coppie per cui la relazione è verificata. Esso viene detto *grafico* della relazione. Dato un sottoinsieme $G$ di $A \times B$, risulta individuata immediatamente una relazione di cui esso è grafico: $(x, y) \in G$.

Nella teoria degli insiemi, spesso il termine "relazione" viene usato nel significato di "grafico", perciò, in futuro, anche noi useremo lo stesso simbolo per indicare una relazione e il suo grafico: scriveremo perciò indifferentemente $\mathscr{R}(x, y)$, oppure $(x, y) \in \mathscr{R}$.

*Esempi*

*a*) In $\mathsf{N} \times \mathsf{N} = \mathsf{N}^2$ si consideri la relazione $\mathscr{R}(m, n)$, che significa "*m è divisore di n*". L'allievo cerchi di farsi un'idea del grafico di questa relazione con un disegno.

*b*) In $\mathsf{R}^2$ si consideri la relazione: $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Il suo grafico è rappresentato dal cerchio con centro nell'origine degli assi e raggio 1.

In questo paragrafo e nei due successivi ci proponiamo di studiare particolari tipi di relazioni. Cominceremo con le *applicazioni*.

3.2 Definizione *Una relazione $f$ definita in $A \times B$ si dice* applicazione (*o* funzione) *di $A$ in $B$ se per ogni $x \in A$ esiste uno e un solo $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$.*

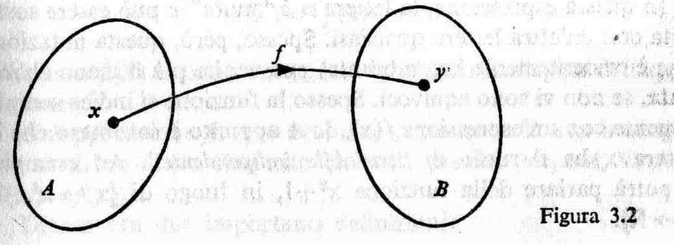

Figura 3.2

Possiamo interpretare intuitivamente la nozione introdotta pensando che $f$ "porti" i punti di $A$ in punti di $B$; la coppia $(x, y)$ fa corrispondere al punto $x \in A$ il punto $y \in B$ in cui esso viene portato (fig. 3.2). L'insieme $A$ viene chiamato *dominio* di $f$, l'insieme $B$ *codominio*. I termini "funzione" e "applicazione" sono equivalenti, tuttavia il termine "funzione" è più tradizionale e lo si impiega di preferenza quando dominio o codominio sono insiemi di numeri reali o complessi. L'espressione:

$$f\colon A \to B, \quad \text{scritta anche} \quad A \xrightarrow{f} B,$$

mette in evidenza il dominio e il codominio di $f$.

Per ogni $x \in A$ l'unico elemento $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$ si indica con $f(x)$ e si dice *valore* assunto dalla funzione $f$ in $x$ (fig. 3.3). Partendo dall'espressione di $f(x)$, la notazione completa

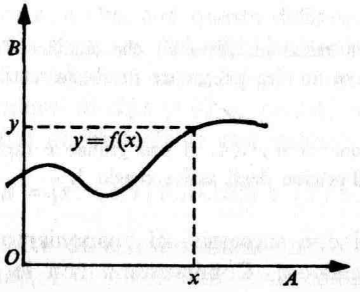


Figura 3.3

che rappresenta l'applicazione $f$ è la seguente:

$$\{x \mapsto f(x)\colon A \to B\}.$$

In questa espressione, la lettera $x$ è "muta" e può essere sostituita con un'altra lettera qualsiasi. Spesso, però, questa notazione (che è evidentemente ingombrante) può venire più o meno abbreviata, se non vi sono equivoci. Spesso la funzione si indica semplicemente con un'espressione $f(x)$, dove appunto è sottinteso che la lettera $x$ ha il ruolo di "*variabile indipendente*". Ad esempio, si potrà parlare della funzione $x^2+1$, in luogo di $\{x \mapsto x^2+1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.



3.3 *Osservazione.* In certi casi si usa indicare il valore di un'applicazione scrivendo la variabile indipendente a mo' di indice: $f_x$, anziché $f(x)$. Ad esempio, se il dominio dell'applicazione è l'insieme $\mathbb{N}$ degli interi naturali, l'applicazione viene detta *successione*; i valori di una successione $a$ (ma più frequentemente si parla dei *termini* della successione) sono indicati con la notazione: $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Le nozioni di funzione di variabile reale e di successione, che nei testi matematici più recenti sono comprese nella nozione generale di applicazione, venivano un tempo considerate come diverse: ciò spiega la difformità di notazione, che è rimasta.

*Esempi banali ma importanti*

*a)* Dato un qualunque insieme $A$, l'applicazione $\{x \mapsto x\colon A \to A\}$ si dice *applicazione identica* di $A$ e si indica con $I_A$.

*b)* Dato l'insieme $A$ e un suo sottinsieme $B$, l'applicazione $\{x \mapsto x\colon B \to A\}$ si dice applicazione di *inclusione* di $B$ in $A$.

*c)* Siano $A$ e $B$ insiemi qualunque; l'applicazione $\{(x, y) \mapsto x\colon A \times B \to A\}$ si dice *proiezione canonica* su $A$, l'applicazione $\{(x, y) \mapsto y\colon A \times B \to B\}$ si dice *proiezione canonica* su $B$.

Data un'applicazione $f\colon A \to B$, e dato un sottoinsieme $X$ di $A$, si dice *immagine* di $X$ il sottoinsieme di $B$ costituito dagli elementi che provengono da qualche elemento di $X$; questo sottoinsieme viene indicato con $f(X)$. Pertanto:

$$f(X) \underset{def}{=} \{y\colon y \in B \text{ e } (\exists x \in X\colon f(x) = y)\}. \qquad [3.3]$$

Si potrà anche scrivere, più brevemente:

$$f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}. \qquad [3.4]$$

L'insieme $f(A)$ si può denominare senz'altro immagine dell'applicazione $f$.

Un'applicazione $f\colon A \to B$ si dice costante se la sua immagine consta di un unico elemento (in altre parole: $\forall x_1 \in A$, $\forall x_2 \in A$: $f(x_1) = f(x_2)$).

Diamo ora due importanti definizioni:

3.4 DEFINIZIONE *Un'applicazione* $f\colon A \to B$ *si dice* surgettiva *se è* $f(A) = B$ *(cioè se l'immagine di* $f$ *coincide con* $B$*).*

Esempi di applicazioni surgettive sono l'applicazione identica, in un qualunque insieme, le proiezioni canoniche del prodotto $A \times B \to A$, $A \times B \to B$ (vedi precedenti esempi *a*) e *c*)); $A$ e $B$ si suppongono non vuoti). Se $f\colon A \to B$ è surgettiva, si usa dire che $f$ è un'applicazione di $A$ *su* $B$.

3.5 DEFINIZIONE *Un'applicazione* $f\colon A \to B$ *si dice* iniettiva *se essa porta punti distinti in punti distinti.*

In altre parole:

$$f \text{ è iniettiva} \underset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x_1 \in A \;\; \forall x_2 \in A\colon f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Ad esempio, l'applicazione identica in un insieme, l'applicazione di inclusione di un sottoinsieme in un insieme (esempi *a*) e *b*)) sono iniettive. La proiezione canonica $A \times B \to A$ non è iniettiva (a meno che...).

3.6 DEFINIZIONE *Un'applicazione che sia iniettiva e surgettiva si dice* "biiettiva".

Ad esempio, l'applicazione identica in un insieme qualsiasi è *biiettiva*. L'applicazione $\{x \mapsto ax + b\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}\}$ è biiettiva se è $a \neq 0$; se è $a = 0$, è un'applicazione costante, e non è né iniettiva né surgettiva.

3.7 *Osservazione.* In molte questioni non è necessario specificare il dominio e il codominio di un'applicazione, essendo sufficiente conoscere un'espressione che la definisce. Ma in certe questioni la precisazione del dominio e del codominio sono essenziali: come quando ci si chiede se un'applicazione è surgettiva, oppure se è iniettiva (ovviamente!). Ad esempio (indicando con $\mathsf{R}^+$ l'insieme dei numeri reali $> 0$) l'applicazione: $\{x \mapsto x^2\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}\}$ non è né iniettiva né surgettiva; l'applicazione: $\{x \mapsto x^2\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}^+\}$ è surgettiva, ma non iniettiva, l'applicazione: $\{x \mapsto x^2\colon \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}\}$ è iniettiva, ma non surgettiva, e, infine, l'applicazione $\{x \mapsto x^2\colon \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}^+\}$ è iniettiva e surgettiva. (Lo studioso compia la verifica aiutandosi anche con i grafici.)



3.8 *Osservazione.* Spesso è comodo rappresentare gli insiemi come immagini di opportune applicazioni, servendosi di espressioni del tipo [3.3] o [3.4]. Ad esempio, l'insieme degli interi naturali *pari* si potrà indicare con $\{2n\colon n \in \mathsf{N}\}$. Sia ora $\mathscr{F}$ una famiglia di insiemi, $J$ un insieme, e supponiamo che esista un'applicazione $\{j \mapsto X_j\colon J \to \mathscr{F}\}$ *surgettiva.* Allora si possono impiegare le seguenti notazioni per indicare l'insieme-unione e l'insieme-intersezione di $\mathscr{F}$:

$$\bigcup_{X \in \mathscr{F}} X \text{ oppure } \bigcup_{j \in J} X_j; \quad \bigcap_{X \in \mathscr{F}} X \text{ oppure } \bigcap_{j \in J} X_j, \text{ (rispettivamente)}. \qquad [3.5]$$

3.9 DEFINIZIONE *Date due applicazioni* $f\colon A \to B$ *e* $g\colon B \to C$ *si dice* applicazione composta *di* $f$ *e* $g$ *l'applicazione* $g \circ f$ *così definita:*

$$g \circ f \underset{def}{=} \{x \mapsto g(f(x))\colon A \to C\}.$$

Si noterà che il codominio di $f$ è stato assunto coincidente con il dominio di $g$: solo in questo caso si può definire l'applicazione composta (si dice anche: $f$ e $g$ sono componibili). Nella scrittura $g \circ f$ (che rispecchia la scrittura $g(f(x))$) si scrive a destra l'applicazione che viene eseguita per prima (fig. 3.4).

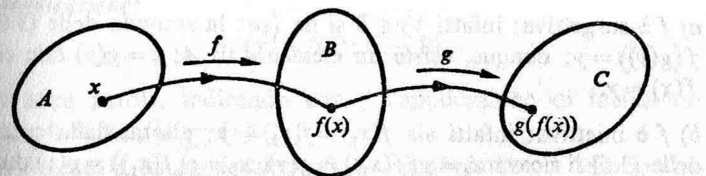


Figura 3.4

Ad esempio: l'applicazione $\{x \to \sqrt{1+x^2}\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}\}$ si può considerare composta con l'applicazione $\{x \mapsto 1 + x^2\colon \mathsf{R} \to \mathsf{R}^+\}$ e l'applicazione $\{y \mapsto \sqrt{y}\colon \mathsf{R}^+ \to \mathsf{R}\}$. Se è $f\colon A \to B$, si ha

$$f \circ I_A = f, \qquad I_B \circ f = f$$

(ricordiamo che $I_A$ e $I_B$ sono le applicazioni identiche di $A$ e di $B$).

Notiamo poi che la composizione delle applicazioni gode della proprietà associativa; cioè: se $f$ e $g$ sono componibili e se $g$ e

$h$ sono componibili, si ha $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. Basta infatti notare che si ha $(h\circ(g\circ f))(x)=h(g(f(x)))=((h\circ g)\circ f)(x)$. Se $f$ è un'applicazione di un insieme $A$ in sé, si possono considerare le iterate di $f$, cioè le applicazioni $f\circ f, f\circ f\circ f$ ecc.; esse possono venire indicate con i simboli $f^2, f^3$ ecc. (Però, nel caso di funzioni a valori reali o complessi, o a valori in un gruppo, occorre stare attenti a non confondere queste funzioni con la funzione "quadrato di $f$": $x \mapsto f(x)^2$; o "cubo di $f$" ecc.)

3.10 DEFINIZIONE *Data un'applicazione $f: A \to B$ si chiama* inversa *della $f$ un'applicazione $g: B \to A$ tale che:*

$$g\circ f = I_A, \quad f\circ g = I_B. \qquad [3.6]$$

Il lettore costaterà subito con esempi che non sempre un'applicazione è *invertibile* (cioè ha un'inversa). Il seguente teorema ci dice chiaramente quando questo può accadere.

3.11 TEOREMA *Sia $f$ un'applicazione $A \to B$. Allora $f$ è invertibile $\Leftrightarrow f$ è biiettiva.*

*Dimostrazione*. Cominciamo con l'implicazione $\Rightarrow$. Supponiamo dunque che $f$ ammetta un'inversa $g$. Allora:

*a*) $f$ è surgettiva; infatti $\forall y \in B$ si ha (per la seconda delle [3.6]) $f(g(y))=y$; dunque, esiste un elemento di $A$: $x=g(y)$ tale che $f(x)=y$.

*b*) $f$ è iniettiva; infatti sia $f(x_1)=f(x_2)=y$; allora, dalla prima delle [3.6] si ricava $x_1=g(f(x_1))=g(y)$, $x_2=g(f(x_2))=g(y)$ dunque $x_1=x_2$.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta $\Leftarrow$.

Supponiamo dunque che $f$ sia biiettiva. Essendo $f$ surgettiva, per ogni $y\in B$ esiste qualche $x$ tale che $f(x)=y$; ma, essendo $f$ iniettiva, ne esiste uno solo. Quindi è bene individuata un'applicazione $g: B\to A$ che fa corrispondere a $y$ l'unico elemento $x\in A$ tale che $f(x)=y$. Dunque, per ogni $y\in B$, è $f(g(y))=y$, e questa non è che la seconda delle [3.6]. D'altra parte, per ogni $x\in A$, è certamente $g(f(x))=x$, e questa coincide con la prima delle [3.6]. ∎



3.12 TEOREMA *L'applicazione inversa di un'applicazione $f: A \to B$, se esiste è unica.*

L'unicità dell'inversa risulta con evidenza dalla seconda parte della dimostrazione del teorema precedente. Riteniamo tuttavia istruttivo darne una dimostrazione autonoma di tipo algebrico.

Supponiamo dunque che $g$ e $g'$ siano applicazioni $B\to A$ soddisfacenti alle relazioni [3.6]. Per la proprietà associativa della composizione, si ha:

$$(g'\circ f)\circ g = g'\circ(f\circ g).$$

D'altra parte, per ipotesi è $g'\circ f=I_A, f\circ g=I_B$; si ricava allora subito $g=g'$. ∎

L'applicazione inversa di $f$ si indica col simbolo $f^{-1}$. È evidente che $(f^{-1})^{-1}=f$: dunque, se $f$ è invertibile, è tale anche la sua inversa. Dati due insiemi $A, B$, se esiste un'applicazione $A\to B$ invertibile, diciamo che $A$ e $B$ (senza più necessità di considerarli in ordine) si possono *mettere in corrispondenza biunivoca*. Studieremo più avanti questa importante relazione fra gli insiemi.

3.13 DEFINIZIONE *Data un'applicazione $f: A\to B$ e dato un sottoinsieme $C$ di $A$, si dice* restrizione *di $f$ a $C$ e si indica con $f|_C$, l'applicazione:*

$$\{x\mapsto f(x): C\to B\}.$$

In altre parole, indicando con $j$ l'applicazione di inclusione: $C\to A$, si ha $f|_C \underset{def}{=} f\circ j$.

Assegnata un'applicazione $f: A\to B$, abbiamo già definito l'immagine $f(X)$ di un sottoinsieme $X$ di $A$. L'applicazione $X\mapsto f(X)$ è un'applicazione $\mathfrak{P}(A)\to\mathfrak{P}(B)$ che, benché impropriamente, verrà indicata con il medesimo simbolo $f$. Ovviamente: $f(\varnothing)=\varnothing$.

Analogamente si potrà introdurre un'applicazione $f^{-1}$: $\mathfrak{P}(B)\to\mathfrak{P}(A)$ ponendo, per ogni $Y\subset B$:

$$f^{-1}(Y)\underset{def}{=}\{x: x\in A \text{ e } f(x)\in Y\}.$$

L'insieme $f^{-1}(Y)$ si dirà *immagine inversa* di $Y$. Osserviamo che questa applicazione, denotata (anch'essa impropriamente) con $f^{-1}$, esiste anche quando $f$ non è invertibile. È evidente poi che, quando sia $Y\cap f(A)=\varnothing$, risulta $f^{-1}(Y)=\varnothing$.

3.14 TEOREMA *Se $f$ è un'applicazione $A \to B$, e $X$ ed $Y$ sono sottoinsiemi di $A$, si ha:*

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$
$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y).$$

Lasciamo la semplice dimostrazione allo studioso; notiamo che, nella seconda relazione, il segno $\subset$ non può, in generale, essere sostituito con il segno $=$. Ad esempio, consideriamo la funzione $\{x \mapsto x^2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, e sia $X = \{x: -1 < x < 0\}$, $Y = \{x: 0 < x < 1\}$. Si ha, evidentemente, $X \cap Y = \{0\}$; dunque è $f(\{0\}) = \{0\}$, mentre è $f(X) \cap f(Y) = \{x: 0 < x < 1\}$. Dunque, in questo caso è $f(X \cap Y) \subsetneq f(X) \cap f(Y)$.

L'applicazione $f^{-1}: \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(A)$ ha, come ora vediamo, un comportamento migliore di quello della $f: \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$, e si mostra molto utile in tante questioni.

3.15 TEOREMA *Sia $f$ un'applicazione $A \to B$, e siano $X$ e $Y$ sottoinsiemi di $B$. Valgono le seguenti relazioni:*

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y),$$
$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y),$$
$$f^{-1}(X') = (f^{-1}(X))',$$

*dove $X'$ indica il complementare di $X$ in $B$ e, analogamente, $(f^{-1}(X))'$ indica il complementare di $f^{-1}(X)$ in $A$.*

*Dimostrazione.*

$$f^{-1}(X \cup Y) = \{x: f(x) \in X \cup Y\} = \{x: (f(x) \in X) \text{ o } (f(x) \in Y)\} =$$
$$= \{x: f(x) \in X\} \cup \{x: f(x) \in Y\} = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

Analogamente si dimostrano le altre relazioni. ∎

È interessante notare che i teoremi 3.14 e 3.15 si estendono al caso di operazioni insiemistiche infinite. Ad esempio: se $\{X_j: j \in J\}$ è una famiglia di parti di $B$, si ha:

$$f\Big(\bigcup_{j \in J} X_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f(X_j),$$
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} X_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(X_j).$$



## Esercizi

1. Disegnare sommariamente il grafico delle seguenti relazioni definite in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ e dire quali di esse rappresentano funzioni $\{x \mapsto y: \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$:

$$|x| + |y| \leq 1; \quad |x + y| \leq 1; \quad x + y + 2 = 0; \quad y \leq x^2; \quad (x^2 - y)^2 \leq 0.$$

2. Dare un esempio di un'applicazione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che sia: *a*) iniettiva, ma non surgettiva; *b*) surgettiva, ma non iniettiva.

3. Dimostrare che un'applicazione $f: A \to B$ è inettiva se e soltanto se per ogni $X \subset A$ e per ogni $Y \subset A$ si ha

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

(Ricordare il teorema 3.14.)

4. Si dimostri che per ogni $f: A \to B$ e per ogni $X \in \mathfrak{P}(A)$ si ha:

$$X \subset f^{-1}(f(X)).$$

Inoltre l'eguaglianza $X = f^{-1}(f(X))$ vale per ogni $X \in \mathfrak{P}(A)$ se e soltanto sc $f$ è iniettiva.[1]

5. Si dimostri che per ogni $f: A \to B$ e per ogni $Y \in \mathfrak{P}(B)$ si ha:

$$f(f^{-1}(Y)) \subset Y.$$

Inoltre l'eguaglianza $f(f^{-1}(Y)) = Y$ per ogni $Y \in \mathfrak{P}(B)$ se e solo se $f$ è surgettiva.[1]

6. Si calcolino le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni reali:

$$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = x - 2,$$
$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 1/(x^2 + 1),$$
$$f(x) = x + a, \quad g(x) = x - a,$$
$$f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = 4x + 3.$$

*7. Si cerchi di caratterizzare le applicazioni $f$ di un insieme $A$ in sé tali che $f^2 = f$. (Si comincerà con l'individuare gli *elementi uniti*, cioè gli elementi $y \in A$ tali che $f(y) = y$.)

8. Si consideri l'applicazione di $\mathbf{Z}$ (insieme degli interi relativi) in sé così definita: $x \mapsto ax + b$, (con $a$ e $b$, ovviamente, interi). Si trovi in quali casi essa è biiettiva.

[1] Gli esercizi 4 e 5 mettono in guardia dal ritenere che $f$ ed $f^{-1}$, come applicazioni fra $\mathfrak{P}(A)$ e $\mathfrak{P}(B)$ siano l'una l'inversa dell'altra (a meno che $f: A \to B$ non sia biiettiva).