Capitolo 2

Successioni e serie numeriche

1 Successioni

Definizione 1.1 *Sia A un insieme. Si dice successione a valori in A una legge che a ogni numero intero n associa un elemento di A, che indicheremo con* a_n.

In altre parole, una successione è un'applicazione, o una funzione,[1] di $\mathbf{N}$ in A.

Essa si indicherà con il simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ o, più brevemente, con $\{a_n\}$, o anche con $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$

Esempio 1.1

La somma dei primi n interi

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è un'applicazione di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, e dunque una successione a valori in $\mathbf{N}$. E' chiaro che, poiché $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, essa si può anche considerare come una successione a valori in $\mathbf{R}$. Analogamente, la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{n}$$

può essere interpretata, a seconda dei casi, come a valori in $\mathbf{Q}$ o in $\mathbf{R}$.

Un'altra successione è data dalla somma dei quadrati dei primi n interi:

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Si ha

$$S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad [1.1]$$

[1] Per maggiori precisazioni sul concetto di funzione, vedi cap. 3, § 1.

come si può dimostrare per induzione, o anche con il seguente artificio. Si parte dalla formula

$$(h+1)^3 - h^3 = 3h^2 + 3h + 1.$$

Se si danno ora a h consecutivamente i valori 0, 1, 2, ..., n e si sommano le $n+1$ equazioni così ottenute, tutti i termini della somma a primo membro si cancellano lasciando soltanto

$$(n+1)^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n + 1.$$

Ricordando infine l'espressione di $S_n^{(1)}$ si ottiene la [1.1]. ■

Esempio 1.2

Altre successioni sono quelle definite da

$$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

e, per k fissato, da

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

che è definita per $n \geqslant k \geqslant 0$ quando si ponga per convenzione $0! = 1$.

I numeri $\binom{n}{k}$ sono detti *coefficienti binomiali* in quanto intervengono nello sviluppo delle potenze di un binomio (binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \; ■ \qquad [1.2]$$

Esercizi

1.1 Calcolare, usando il metodo precedente, le somme

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3,$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} i^4.$$

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

1.2 Calcolare le seguenti somme:

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$
(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2$

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$

*(d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1.3 Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

1.4 Dimostrare la formula [1.2] del binomio di Newton (si proceda per induzione usando il risultato dell'esercizio precedente).

1.5 Dimostrare le seguenti formule:

(a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

*(b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\, 2^{n-1}$

*(c) $1 \cdot 2\binom{n}{2} + 2 \cdot 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)n\binom{n}{n} = n(n-1)\, 2^{n-2}$

(si ricordi la formula del binomio di Newton).

1.6 Verificare che

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2 • Limite di una successione

Il concetto di limite per una successione è, a ben vedere, alla base di tutta l'analisi. Allo scopo di chiarirlo, esaminiamo dapprima un certo numero di esempi.

Esempio 2.1

Consideriamo la successione $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, il cui termine generico è $a_n = 1/n$.

Si vede subito che, man mano che n aumenta, il termine a_n si avvicina sempre più a zero. Più precisamente, *se prendiamo un arbitrario intorno $I(0, r)$ di 0, tutti i termini della successione, a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(0, r)$*. Diremo allora che il limite della successione $1/n$ è zero, e scriveremo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Il numero n_0, come è naturale, dipende dal raggio r dell'intorno scelto: più piccolo si prende quest'ultimo, più avanti bisognerà andare prima che i termini della successione cadano tutti in $I(0, r)$. Nel nostro caso poi, n_0 si può calcolare esplicitamente; infatti il termine $a_n = 1/n$ cadrà in $I(0, r)$ non appena $1/n$ sarà minore di r, e dunque quando $n > 1/r$. In definitiva, si potrà prendere come n_0 il valore $1/r$, o più precisamente, dato che n_0 è intero, il più piccolo intero maggiore di $1/r$.

La situazione è analoga se si considera la successione

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}.$$

Anche stavolta la successione tende a zero, con la sola differenza che i suoi termini sono alternativamente maggiori e minori di zero. ■

Esempio 2.2

Consideriamo la successione

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(n+1) & \text{per } n \text{ dispari}, \end{cases}$$

oppure, per esteso,

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Anche qui è facile riconoscere che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0;$$

infatti, *comunque si prenda un intorno $I(0, r)$ dello zero, tutti gli a_n, a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(0, r)$.*

A differenza dell'esempio precedente, la distanza del termine a_n dal limite della successione non diminuisce al crescere di n. ■

Esempio 2.3

Sia $a_n = n/(n+1)$. Se si scrive

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

non è difficile vedere che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$

Infatti si ha

$$a_n - 1 = \frac{1}{n+1}$$

e quindi, *se si prende un arbitrario intorno $I(1, r)$ di 1, tutti i numeri a_n cadranno in esso, tranne al più un numero finito.* ■

Analogamente, la successione

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n-1}$$

ha come limite 1.

Se si scrive

$$a_n = 1 - \frac{2(n-1)}{n^2+2n-1} = 1 - r_n,$$

basterà dimostrare che r_n tende a zero. Ora si ha

$$0 \leqslant r_n < \frac{2n}{n^2+2n-1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

e dunque $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Infatti, preso arbitrariamente un numero $\epsilon > 0$, si avrà $0 \leqslant r_n < \epsilon$ non appena si prenda $n > \dfrac{2}{\epsilon}$. Ne segue, per questi valori di n:

$$|a_n - 1| = r_n < \epsilon,$$

e quindi tutti i termini della successione a_n, a partire da $n_0 = 2/\epsilon$ in poi, appartengono all'intorno $I(1, \epsilon)$. ■

Esempio 2.4

Vogliamo trovare il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}$, quando p è un numero reale positivo. Ricordiamo che se h è un numero reale, $h \geqslant -1$, allora per ogni intero positivo n risulta:

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh \qquad [2.1]$$

(vedi cap. 1, esempio 6.1).

Ciò premesso, passiamo allo studio della successione $\sqrt[n]{p}$, e supponiamo $p > 1$. In tal caso anche $\sqrt[n]{p} > 1$, e quindi si può porre

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n, \quad h_n > 0.$$

Vogliamo adesso valutare il termine h_n. Si ha, per la [2.1],

$$p = (1+h_n)^n \geqslant 1 + n\,h_n$$

e quindi

$$0 < h_n \leqslant \frac{p-1}{n}.$$

Si vede allora subito $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1. \qquad [2.2]$$

Se p è minore di 1, si può scrivere

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+k_n}, \quad k_n > 0$$

e si ha, sempre per la [2.1]

$$p = \frac{1}{(1+k_n)^n} \leqslant \frac{1}{1+nk_n},$$

da cui

$$0 < k_n \leqslant \frac{1/p-1}{n},$$

e dunque la [2.2] vale anche per $0<p<1$. ■

Esempio 2.5. La progressione geometrica: $a_n = \alpha^n$

Cominciamo col considerare il caso $0<\alpha<1$. Si può porre: $\alpha=(1+h)^{-1}$ con $h>0$ e quindi

$$0<\alpha^n = (1+h)^{-n} \leqslant (1+nh)^{-1} < \frac{1}{nh}.$$

Poiché h dipende solo da α (e non da n), si può immediatamente concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0.$$

La stessa conclusione vale per $-1<\alpha<0$, in quanto si ha

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^n = 0.$$

Se $\alpha=1$ è ovvio che $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 1$ dato che $\alpha^n = 1$ per ogni n.

Se $\alpha>1$, posto $\alpha=1+h$, si ha $\alpha^n \geqslant 1+nh$.

Si vede allora che, *comunque si scelga un numero M, tutti i termini della successione, a partire da un certo indice* n_0 *in poi, saranno maggiori di M.*

Esprimeremo ciò dicendo che

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = +\infty \qquad \alpha>1.$$

Infine, se $\alpha=-1$, la successione α^n non tende a nessun limite, dato che assume alternativamente i valori -1 e $+1$.

Analogamente, se $\alpha<-1$ i termini α^n saranno alternativamente positivi e negativi, mentre $|\alpha|^n$ tenderà a $+\infty$, cosicché non esisterà il limite di α^n. Riepilogando,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1<\alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ \text{non esiste se } \alpha\leqslant -1. \blacksquare \end{cases}$$

Esempio 2.6. La serie geometrica

Sia q un numero reale e sia

$$s_n = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j$$

la somma dei primi n termini della successione geometrica di ragione q.

Vogliamo vedere che cosa accade quando si fa tendere n all'infinito. Per questo ricordiamo che si ha

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Se q è un numero compreso tra -1 e 1, la successione q^n, e quindi anche $q^n/(1-q)$, tende a zero.

Si ha dunque, per $|q|<1$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}. \blacksquare$$

Il limite delle somme s_n si indica anche con la notazione più suggestiva

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

e si chiama *somma delle serie* geometrica di ragione q.

Esempio 2.7

Sia $a_n = \sqrt[n]{n}$. Per calcolare il limite di questa successione faremo uso di un piccolo artificio.

Poniamo $b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$. Se $n>1$, si ha $b_n>1$ e quindi $b_n = 1+h_n$, con $h_n>0$.

Usando al solito la [2.1] troviamo

$$\sqrt{n} = b_n^n = (1+h_n)^n \geqslant 1+nh_n$$

e quindi

$$h_n \leqslant \frac{\sqrt{n}-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ma allora:

$$1 \leqslant a_n = b_n^2 = 1 + 2h_n + h_n^2 \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}},$$

da cui segue immediatamente

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \blacksquare$$

Esempio 2.8

Si consideri la successione $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Vogliamo far vedere che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Questo è evidente se si moltiplica e si divide per $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Infatti:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \blacksquare$$

Esempio 2.9

Vogliamo calcolare il limite della successione

$$a_n = nA^{-n}$$

con $A > 1$.

Se poniamo $\sqrt{A} = 1 + h$ si ha

$$(\sqrt{A})^n = (1+h)^n \geqslant 1 + nh > nh,$$

da cui

$$A^n > n^2 h^2.$$

Ma allora

$$\frac{n}{A^n} < \frac{1}{nh^2}$$

e dunque, se $A > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} nA^{-n} = 0. \blacksquare$$

Esercizi

2.1 Dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Calcolare i limiti, per $n \to \infty$, delle successioni seguenti:

(a) $\dfrac{n^4+2n+1}{n^3+3}$

(b) $\dfrac{n^3+6n}{3n^3+2n+2}$

(c) $\dfrac{n-n^2}{n+2}$

(d) $\dfrac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2.$

(e) $\dfrac{6n^4+1}{n^4+n-1}$

(f) $\dfrac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$

2.2 Dimostrare che

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$

*(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

*(d) $\lim_{n\to\infty} \left\{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right\}=0$

*(e) $\lim_{n\to\infty} \left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}=+\infty$

(f) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}=\dfrac{1}{2}.$

(g) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0.$

3 Limite di una successione (continuazione)

Possiamo ora ricavare dagli esempi riportati nel paragrafo precedente una definizione rigorosa di limite di una successione.

Definizione 3.1 *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione a valori reali e sia $L\in\mathbf{R}$. Si dirà che il limite della successione a_n, per n tendente all'infinito, è L e si scriverà*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

se, per ogni intorno $I(L,r)$ di L, esiste un numero reale ν, tale che per ogni intero $n>\nu$ si abbia $a_n\in I(L,r)$.

La definizione 3.1 può essere riformulata variamente. Non è difficile costatare ad esempio, che le seguenti definizioni sono equivalenti alla precedente:

(A_1) *Si ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un numero reale* ν *tale che per ogni intero* $n > \nu$ *si abbia* $|a_n - L| < \epsilon$.

(A_2) *Si ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *se, per ogni intorno* $I(L, r)$ *di* L, *tutti gli* a_n, *tranne al più un numero finito, appartengono a* $I(L, r)$.

Una successione che ha limite finito si dice anche *convergente*.

Esempio 3.1

Torniamo, per un momento, alla successione dell'esempio 2.2:

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(n+1) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

e dimostriamo, in base alla definizione, che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Per questo basterà osservare che per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $0 < a_n \leqslant 2/n$.

Se fissiamo allora un intorno $I(0, r)$ dello zero, avremo che $a_n \in I(0, r)$ non appena si abbia $2/n < r$ e cioè non appena $n > \nu = 2/r$. ∎

Proposizione 3.1 *Una successione non può avere più di un limite.*

Dimostrazione. Sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, e sia P un numero reale diverso da L. Se si prende $r = |P - L|/2$, i due intorni $I(L, r)$ e $I(P, r)$ non hanno punti in comune. D'altra parte, per la definizione di limite (A_2), solo un numero finito di punti a_n può cadere fuori di $I(L, r)$, e dunque in $I(P, r)$. Ne segue che P non può essere limite della successione a_n. ∎

Una successione $\{a_n\}$ si dirà *limitata superiormente* se esiste un numero M tale che per ogni n risulta $a_n < M$, in altre parole se si ha:

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} a_n = \sup\,\{a_n; n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Analogamente, $\{a_n\}$ si dice *limitata inferiormente* se $\inf_{n\in\mathbf{N}} a_n > -\infty$, e infine si dice *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente.

Proposizione 3.2 *Una successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tutti gli a_n a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(L, 1)$.

Se si pone

$$M=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n_0}|+|L|+1:$$

si ha

$$|a_n|<M, \qquad \forall n\in \mathbf{N}. \qquad [3.1]$$

Infatti, se $n\leqslant n_0$, la [3.1] è ovvia; mentre, se $n>n_0$ allora a_n appartiene a $I(L,1)$ e quindi $|a_n|\leqslant|L|+|a_n-L|<|L|+1$. ■

Osservazione 3.1. A causa dell'affinità lessicale può sorgere confusione tra le affermazioni "la successione $\{a_n\}$ ha limite" e "la successione $\{a_n\}$ è limitata".

Abbiamo visto che una successione che ha limite (finito) è limitata (proposizione 3.2); il viceversa però non è vero, come si vede considerando la successione $\{(-1)^n\}$, che è limitata ma non ha limite (vedi esempio 2.5). ■

Passiamo ora a considerare il caso in cui la successione $\{a_n\}$ abbia limite infinito (vedi esempio 2.5).

Definizione 3.2 *Diremo che la successione a_n ha limite $+\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$

se, per ogni $M\in\mathbf{R}$, esiste un numero reale ν tale che, per ogni intero $n>\nu$ si abbia

$$a_n>M. \qquad [3.2]$$

Analogamente si dirà che

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty.$$

se, per ogni $K\in\mathbf{R}$, esiste un $\nu\in\mathbf{R}$ tale che, per ogni intero $n>\nu$ si abbia:

$$a_n<K. \qquad [3.3]$$

E' evidente che basterà verificare la [3.2] per M abbastanza grande (ad esempio per $M>0$), e la [3.3] per $K<0$.

Esempio 3.2

Si ha, per $\alpha>1$:

$$\lim_{n\to\infty}(n-\alpha^n)=-\infty.$$

Abbiamo già visto che $\lim\limits_{n\to\infty} n/\alpha^n=0$ (vedi esempio 2.9); dunque da un certo n_0 in poi sarà $n\,\alpha^{-n}<1/2$, ovvero $n<\alpha^n/2$.

Ne segue che, per $n > n_0$,

$$n - \alpha^n < -\frac{1}{2}\,\alpha^n < -\frac{1}{2}\,\{1 + n(\alpha - 1)\} < -\frac{n}{2}(\alpha - 1).$$

Se si prende allora $K < 0$ risulterà $n - \alpha^n < K$ non appena $n > n_0$ e $-\frac{n}{2}\,(\alpha - 1) < K$ cioè non appena

$$n > \nu = \max\left\{n_0, \frac{-2K}{\alpha - 1}\right\}. \blacksquare$$

Osservazione 3.2. Si possono unificare le definizioni di limite date finora se si chiamano *intorni di* $+\infty$ le semirette $(M, +\infty)$ e *intorni di* $-\infty$ le semirette $(-\infty, K)$. ■

Con queste convenzioni si ha la seguente

Definizione generale di limite. *Diremo che la successione* $\{a_n\}$ *ha come limite* L *(finito,* $+\infty$ o $-\infty$*) se per ogni intorno* I *di* L *esiste un* $\nu \in \mathbf{R}$ *tale che per ogni* $n > \nu$ *si abbia* $a_n \in I$.

Esercizi

3.1 Ricordiamo che $\lim\limits_{n \to \infty} (n^2 - n)/(3n^2 + 1) = 1/3$ (vedi esercizio 2.1). Trovare un ν tale che per ogni $n > \nu$ la distanza tra $(n^2 - n)/(3n^2 + 1)$ e $1/3$ sia minore di $1/10$ (di $1/1000$; di $1/10^5$).

3.2 Dimostrare, usando la definizione, che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

3.3 Usando la definizione di limite, riesaminare i limiti del paragrafo 2.

3.4 Dimostrare che la successione

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

non ha limite.

***3.5** Si sostituisca la frase "la successione $\{a_n\}$ non ha limite" con una frase equivalente in cui non compaia la parola limite né alcun suo sinonimo.

3.6 Dimostrare che se la successione $\{a_n\}$ ha limite L, la successione $\{|a_n|\}$ tende a $|L|$. In quali casi vale il viceversa?

4 Operazioni con i limiti

Dalla definizione di limite si deducono senza difficoltà le seguenti regole di calcolo:

Proposizione 4.1 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti e siano a e b i loro limiti. Allora:*

(j_1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(j_2) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

(j_3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(j_4) *se tutti i b_n e il loro limite b sono diversi da zero, si ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dimostrazione. Dimostreremo solamente le proprietà (j_3) e (j_4); le dimostrazioni di (j_1) e (j_2) sono più semplici e vengono lasciate per esercizio. Cominciamo dalla (j_3). Si ha:

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$$

e quindi, ricordando che la successione $\{a_n\}$ è limitata, cioè che $M = \sup |a_n| < +\infty$, si ottiene

$$|a_n b_n - ab| \leqslant M|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|.$$

Sia $\eta > 0$; esisteranno due numeri reali ν_1 e ν_2 tali che

$$|a_n - a| < \eta, \qquad \forall n > \nu_1$$
$$|b_n - b| < \eta, \qquad \forall n > \nu_2$$

e quindi, per $n > \nu = \max(\nu_1, \nu_2)$, si avrà

$$|a_n b_n - ab| \leqslant (M + |b|)\eta$$

Preso $\epsilon > 0$, se si sceglie $\eta = \epsilon/(M + |b|)$, si conclude allora

$$|a_n b_n - ab| < \epsilon, \qquad \forall n > \nu$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Veniamo ora alla (j_4). Cominciamo col far vedere che, nelle ipotesi assunte, la successione $\{1/b_n\}$ è limitata. Infatti, poiché $|b_n|$ tende a $|b|$ (vedi esercizio 3.6) e

$|b| \neq 0$, si può prendere $r = |b|/2$ nella definizione 3.1; ne segue che esiste un numero n_0 a partire dal quale tutti i termini $|b_n|$ appartengono a $I(|b|, |b|/2)$ e dunque in particolare

$$|b_n| > |b|/2 \qquad \forall n > n_0.$$

Se allora si prende

$$M = \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|b|}\right\},$$

risulta $\dfrac{1}{|b_n|} \leqslant M$.

Ora si ha

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - b_n a}{b b_n}\right| = \left|\frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b b_n}\right| \leqslant M|a_n - a| + \frac{M|a|}{|b|}|b_n - b|,$$

e la dimostrazione prosegue come sopra. ■

Risultati analoghi si hanno quando uno o ambedue i limiti sono infiniti; si dimostra in questo caso che

(i_1) se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \to +\infty$,
(i_2) se $a_n \to -\infty$ e b_n è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$,
(h_1) se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,
(h_2) se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,
(h_3) se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L > 0$, allora $a_n b_n \to -\infty$,
(h_4) se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to L < 0$, allora $a_n b_n \to +\infty$,
(k_1) se $a_n \to +\infty$, allora $1/a_n \to 0$,
(k_2) se $a_n \to 0$ ed $a_n \neq 0$, allora $1/|a_n| \to +\infty$. In particolare, se $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora $1/a_n \to +\infty$.

In generale, niente si può concludere nei casi che non rientrano nella tabella precedente e cioè per le cosiddette forme indeterminate:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}. \;■$$

Vediamo ora come si comporta l'operazione di passaggio al limite in relazione all'ordinamento dei numeri reali. Otterremo, in questo senso, due notevoli risultati.

Teorema 4.1 (dei due carabinieri) *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni verificanti la relazione*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \qquad \forall n \in \mathbf{N}; \qquad [4.1]$$

se a_n e c_n tendono verso lo stesso limite L, allora si ha anche

$$\lim_{n \to \infty} b_n = L.$$

Dimostrazione. Sia I un intorno di L; poiché $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, allora tutti gli a_n e i c_n, tranne al più un numero finito, appartengono a I. Siccome I è un intervallo, dalla [4.1] segue allora che tutti i b_n, tranne al più un numero finito, sono in I e quindi la tesi. ■

Teorema 4.2 (della permanenza del segno) *Se* $L = \lim_{n\to\infty} a_n > 0$, *allora tutti i termini* a_n, *tranne al più un numero finito, sono positivi.*

Dimostrazione. Tutti gli a_n, tranne al più un numero finito, appartengono a $I(L, L)$, cioè all'intervallo $(0, 2L)$. ■

In maniera del tutto simile si dimostra che *se* $\lim_{n\to\infty} a_n > M[<M]$, *allora esiste un numero* ν *tale che per ogni* $n > \nu$ *risulta* $a_n > M[<M]$.

I risultati di questo paragrafo sono molto utili per il calcolo dei limiti, come si può vedere dai seguenti esempi.

Esempio 4.1

Per $A > 1$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} n^2 A^{-n} = 0.$$

Infatti si ha

$$n^2 A^{-n} = (n\sqrt{A}^{-n})^2$$

e poiché $\sqrt{A} > 1$, $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{A}^{-n} = 0$ (vedi esempio 2.9) cosicché per la (j_3) si conclude che $n^2 A^{-n}$ tende a zero.

In maniera analoga, osservando che

$$n^k A^{-n} = \{n(\sqrt[k]{A})^{-n}\}^k,$$

si dimostra che se k è un intero e $A > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} n^k A^{-n} = 0.$$

Infine, dato che se $\beta \in \mathbf{R}$ e $[\beta]$ è la parte intera di β,[2] risulta:

$$n^{[\beta]} \leqslant n^\beta \leqslant n^{[\beta]+1},$$

si deduce dal teorema 4.1:

$$\lim_{n\to\infty} n^\beta A^{-n} = 0 \qquad A > 1. \; ■ \tag{4.2}$$

[2] Si chiama *parte intera* di β il più grande intero che non supera β: ad esempio $[\sqrt{2}] = 1$ e $[-\pi] = -4$.

Esempio 4.2
Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1, \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Se α è un intero positivo, allora, tenuto conto che

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = (\sqrt[n]{n})^\alpha,$$

il risultato si ottiene dalla (j_3), ricordando che $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

D'altra parte, se α è un intero negativo si ha

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = (\sqrt[n]{n^{-\alpha}})^{-1},$$

e la tesi segue da quanto detto sopra e da (j_4).

Infine, per α arbitrario, si ha

$$\sqrt[n]{n^{[\alpha]}} \leqslant \sqrt[n]{n^\alpha} \leqslant \sqrt[n]{n^{[\alpha]+1}}$$

e per il teorema dei carabinieri risulta di nuovo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1. \ ■$$

Esempio 4.3
Sia $\{a_n\}$ una successione divergente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Allora, se $A > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A^{a_n}} = 0. \qquad [4.3]$$

Infatti, se si pone $\sqrt{A} = 1 + h$, risulta

$$\sqrt{A}^{a_n} = (1+h)^{a_n} \geqslant (1+h)^{[a_n]} \geqslant 1 + h[a_n],$$

e dunque

$$A^{a_n} \geqslant h^2 [a_n]^2.$$

Si ha allora

$$\frac{a_n}{A^{a_n}} \leqslant \frac{a_n}{h[a_n]^2} \leqslant \frac{[a_n]+1}{h[a_n]^2},$$

da cui segue subito la [4.3]. Ragionando poi come nell'esempio 4.1 si conclude che, per ogni $\beta \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\beta}{A^{a_n}} = 0 \qquad A > 1. \blacksquare \tag{4.4}$$

Esempio 4.4

Segue facilmente dalla [4.4] che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = 0, \qquad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbf{R}. \tag{4.5}$$

Sia B la base dei logaritmi, e supponiamo $B > 1$. Posto $a_n = \log n$, si ha $n^\alpha = B^{\alpha\, a_n}$, e dunque si può applicare la [4.4] con $A = B^\alpha > 1$. Lo stesso risultato sussiste se $0 < B < 1$ in quanto $\log_B x = -\log_{1/B} x$. ■

Osservazione 4.1. I limiti [4.2] e [4.5] e l'esercizio 2.2 (g) descrivono il modo di andare all'infinito (quando n va all'infinito) dei logaritmi, delle potenze, dell'esponenziale e del fattoriale di n. Possiamo osservare come il logaritmo di n vada all'infinito più lentamente di qualsiasi potenza, questa più lentamente di qualsiasi esponenziale (ovviamente con la base maggiore di uno), e infine quest'ultimo più lentamente del fattoriale di n. ■

Esercizi

4.1 Dimostrare le (j_1) e (j_2) di pagina 65.

4.2 Dimostrare le relazioni (i), (h) e (k) di pagina 66.

4.3 Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, e per ogni $A > 1$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{A^n} = 0.$$

4.4 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{n^2+1}}$

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1} - \sqrt{n^2+2}\right)$

(e) $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$

(f) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

(g) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!}$.

5 Serie numeriche

Un caso particolare, ma di notevole importanza, è quello delle serie.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali; poniamo[3]

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

La coppia di successioni $(\{a_n\}, \{s_n\})$ si dice *serie* di termine generico a_n, e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oppure con } \Sigma a_n.$$

I numeri a_n si chiamano *termini* della serie, mentre le s_n si chiamano *somme parziali* o *ridotte* della serie.

Definizione 5.1 *Diremo che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente se esiste finito il limite delle somme parziali:*

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbf{R}.$$

In tal caso, il numero s si chiama somma della serie, e si scrive $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Quest'ultima notazione può sembrare ambigua (e in effetti lo è) dato che lo stesso simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sta a denotare sia la serie, cioè la coppia di successioni $(\{a_n\}, \{s_n\})$, sia la sua somma, che è il limite delle somme parziali s_n. In genere, però, il contesto sarà sufficiente a decidere a quali dei due significati ci si riferisca di volta in volta. Accade spesso che invece di sommare la successione $\{a_n\}$ a partire dal termine di indice 1, si cominci dal

[3] La successione s_n si può anche definire per ricorrenza: $s_1 = a_1$; $s_{n+1} = s_n + a_n$.

termine a_0, o da un altro termine qualsiasi, come ad esempio da a_4. Nel primo caso le somme parziali cominceranno dal termine a_0:

$$s_0 = a_0; \quad s_1 = a_0 + a_1, \ldots; \quad s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

e nel secondo da a_4:

$$s_4 = a_4; \quad s_5 = a_4 + a_5; \ldots; \quad s_n = \sum_{i=4}^{n} a_i.$$

Un esempio di serie convergente è, come abbiamo visto, la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad [5.1]$$

con $-1 < a < 1$.

Le serie non convergenti si dividono poi talvolta in serie *divergenti*, quando il limite delle somme parziali è $+\infty$, o $-\infty$ (ad esempio la serie geometrica con $a \geqslant 1$), e *indeterminate*, quando la successione delle somme parziali non ha limite (come la serie geometrica con $a \leqslant -1$).

6 Limiti di successioni monotòne; serie a termini positivi

Un posto speciale nella teoria meritano le successioni monotòne, e cioè le successioni *crescenti* o *decrescenti*.

Definizione 5.1 *La successione* $\{a_n\}$ *si dice crescente se*

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad [6.1]$$

Se poi nella [6.1] *si ha sempre la disuguaglianza stretta, e cioè*

$$a_n < a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad [6.2]$$

la successione $\{a_n\}$ *si dirà strettamente crescente.*

In maniera analoga, si chiamerà *decrescente* una successione $\{a_n\}$ per la quale

$$a_n \geqslant a_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

(*strettamente decrescente* se si ha sempre $a_n > a_{n+1}$).

Si ha il seguente

Teorema 6.1 *Sia* $\{a_n\}$ *una successione crescente. Allora esiste il limite della successione e si ha*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n. \qquad [6.3]$$

Dimostrazione. Sia $L = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$. Cominciamo a considerare il caso $L < +\infty$. Risulterà ovviamente, per $\epsilon > 0$,

$$a_n \leqslant L < L + \epsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

D'altra parte, poiché $L - \epsilon$ non è un maggiorante (si ricordi la definizione di estremo superiore), esisterà un n_0 tale che

$$a_{n_0} > L - \epsilon.$$

Poiché la successione a_n è crescente, si avrà, per $n > n_0$,

$$a_n > a_{n_0} > L - \epsilon,$$

e quindi

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \ \forall n > n_0,$$

cosicché $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

Se invece $L = +\infty$, la successione a_n non è limitata superiormente; fissato $M \in \mathbf{R}$, esisterà allora un n_0 tale che $a_{n_0} > M$, e quindi, ricordando che la successione è crescente,

$$a_n > a_{n_0} > M, \ \ \forall n > n_0,$$

e la [6.3] è dimostrata anche in questo caso. ■

Con lo stesso metodo si dimostra che se $\{a_n\}$ è una successione decrescente, si ha

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n.$$

Osservazione 5.1. La conclusione del teorema precedente sussiste se si suppone soltanto che la successione $\{a_n\}$ sia *definitivamente* crescente, e cioè che esista un intero n_1 tale che

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \ \ \forall n \geqslant n_1.$$

In tal caso, si avrà

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \geqslant n_1} a_n. \ ■ \qquad [6.4]$$

In generale, si dice che una successione $\{a_n\}$ verifica *definitivamente* (o *da un certo punto in poi*) una relazione se esiste un intero n_1 tale che la detta relazione sia soddisfatta per ogni $n \geqslant n_1$. Ad esempio, la successione $\{\sqrt{n}\}$ è definitivamente maggiore di 7 ($n_1 = 50$), mentre la successione $n/(n^2 + 8)$ è definitivamente decrescente, come sarà utile esercizio verificare.

I risultati riguardanti i limiti di successioni restano validi, con le dovute piccole modifiche, se le ipotesi si suppongono verificate solo da un certo punto in poi. E' questo il caso del teorema 4.1, come pure del teorema 6.1, che ha dato lo spunto per questa osservazione, e di molti dei teoremi seguenti, il cui esame è lasciato al lettore. ■

Il teorema 6.1 assume un posto di rilievo nella teoria delle serie a termini positivi. Se in una serie Σa_n tutti i termini sono positivi (o meglio non negativi), la successione delle somme parziali sarà crescente; risulterà infatti

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n.$$

Si può concludere allora che la serie Σa_n non può essere indeterminata, ma sarà o convergente (se la successione $\{s_n\}$ è limitata, ovvero, se $\sup_{n \in \mathbf{N}} s_n < +\infty$) oppure divergente (se $\sup_{n \in \mathbf{N}} s_n = +\infty$). Per le serie a termini positivi, il problema della convergenza si ridurrà dunque a cercare un maggiorante per la successione delle somme parziali.

Teorema 6.2 (criterio del confronto) *Siano Σa_n e Σb_n due serie a termini positivi. Supponiamo che esista un intero n_0 tale che per ogni $n \geqslant n_0$ risulti*

$$a_n \leqslant b_n.$$

Allora, se la serie Σb_k converge, convergerà anche la serie Σa_k.

Dimostrazione. Siano $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ le somme parziali delle serie Σa_k e Σb_k, rispettivamente. Si ha, per $n > n_0$,

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \leqslant s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} b_i = s_{n_0} + \sigma_n - \sigma_{n_0}.$$

Se si indica con σ la somma della serie Σb_k, si avrà dunque

$$s_n \leqslant s_{n_0} - \sigma_{n_0} + \sigma,$$

cosicché la successione $\{s_n\}$ è limitata. Per il teorema 6.1, essa è allora convergente e risulta inoltre

$$s \leqslant s_{n_0} - \sigma_{n_0} + \sigma. \ ■$$

Anche se è equivalente alla tesi del teorema 6.2, varrà la pena di notare che se la serie Σa_n diverge, divergerà anche la serie Σb_n.

Esempio 6.1
La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n}, \quad a > 1,$$

è convergente.

Si ha infatti

$$na^{-n} = na^{-n/2}\, a^{-n/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} na^{-n/2} = 0 \qquad \text{(vedi esempio 2.9).}$$

Esisterà allora un intero n_0 tale che

$$na^{-n/2} < 1$$

per ogni $n \geqslant n_0$, e dunque, per tali n,

$$na^{-n} < a^{-n/2}.$$

Poiché $\Sigma a^{-n/2}$ converge, essendo una serie geometrica di ragione $a^{-1/2}$ (vedi esempio 2.5), convergerà anche la serie data. ■

Esempio 6.2
La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{6.5}$$

è convergente.

Infatti, risulta $\lim_{n\to\infty} 2^n/n! = 0$ (vedi esercizio 2.2 (g))
e dunque esisterà un numero n_0 tale che

$$\frac{1}{n!} < 2^{-n}, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

(in effetti risulta $n_0 = 4$). Poiché la serie a secondo membro converge, convergerà anche la serie iniziale. La sua somma è un numero che ricorre spesso nella matematica, e si indica con e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \ ■$$

Esercizi

6.1 Dimostrare che la successione definita come segue:

$$a_1 = 0, \quad a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

è convergente, e si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 2.$$

***6.2** Siano a_1 e b_1 due numeri positivi, con $a_1 < b_1$. Si ponga

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

e, per $n = 2, 3, \ldots,$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Si dimostri che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite L, che prende il nome di *media aritmo-geometrica* di a_1 e b_1.

6.3 Siano a_1 e b_1 due numeri positivi, con $a_1 < b_1$. Si ponga, per $n = 1, 2, \ldots,$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Dimostrare che le successioni così costruite convergono allo stesso limite.

6.4 Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Si dimostri che se si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

***6.5** Dimostrare che esiste il limite L della successione

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

e che risulta

$$\frac{1}{2} < L < 1.$$

6.6 Dire se convergono le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} a^{-n} \quad (a > 1).$$

6.7 Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{nx}.$$

7 Due numeri particolari: e e π

Abbiamo incontrato la costante e nell'esempio 6.2:

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \qquad [7.1]$$

Ne discuteremo ora alcune ulteriori proprietà; in primo luogo, dimostreremo che si ha

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad [7.2]$$

Cominciamo col dimostrare che la successione $T_n=(1+1/n)^n$ è crescente. Risulta infatti, dalla formula del binomio,

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{1}{n^k}.$$

Mediante la [2.1] con $h=-\dfrac{k}{n+1}>-1$, si ottiene

$$1-\frac{k}{n+1}\leqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k=\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

e quindi

$$T_n\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}<$$

$$<\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}=T_{n+1},$$

cosicché la successione T_n è crescente.

In secondo luogo, osserviamo che si ha

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}<\frac{1}{k!},$$

e dunque

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e.$$

Per il teorema 6.1, la successione $\{T_n\}$ ha limite finito T, e risulta $T\leqslant e$.

Per dimostrare che $T=e$, si osservi che, se $n>m$, risulta

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}\geqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}.$$

Se ora facciamo tendere n a $+\infty$, ricordando che, per $k=0, 1, ..., m$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1,$$

otteniamo

$$T \geqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

per ogni intero m, e quindi, passando al limite per $m \to +\infty$, $T \geqslant e$. Poiché si era già visto che $T \leqslant e$, si conclude infine che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad [7.3]$$

Veniamo ora al calcolo approssimato del numero e. Vogliamo valutare l'errore che si commette se si sostituisce a e il valore approssimato S_n. Si ha

$$S_{n+m} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} \left\{1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+m)}\right\},$$

e quindi

$$S_{n+m} - S_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left\{1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}.$$

Se ora si passa al limite per $m \to \infty$, si ottiene

$$0 \leqslant e - S_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

e quindi, in definitiva,

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!\,n}. \qquad [7.4]$$

Dalla [7.4] segue che e è *irrazionale*. Infatti, se fosse $e = p/q$, con p e q interi primi tra di loro, si avrebbe

$$0 < \frac{p}{q} - S_q = \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} < \frac{1}{q!\,q}$$

e, moltiplicando per $q!$,

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - S_q\right) < \frac{1}{q}.$$

Ma $q!\,(p/q - S_q)$ è intero, e quindi l'ultima relazione è impossibile.

Veniamo ora al secondo dei numeri in questione. Geometricamente, π è l'area del cerchio di raggio 1. Così dicendo, noi accettiamo come evidente che tale numero esista, cioè che l'area del cerchio possa essere espressa con un numero reale.

Indipendentemente da questioni di rigore, questa definizione però non è di alcun aiuto quando si vuol calcolare il numero π; in questo caso, occorre rifarsi a un qualche metodo di approssimazione per l'area del cerchio.

Se si inscrive nel cerchio un poligono regolare di m lati, e si indica con $\varphi\left(=\frac{\pi}{m}\right)$ l'angolo al centro (vedi fig. 2.1) e con A_m l'area del poligono inscritto, risulta

$$A_m = m\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}m\sin\varphi.$$

Se ora si passa al poligono di $2m$ lati, l'angolo al centro φ si dimezza, e dunque:

$$A_{2m} = m\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Ricordando che $2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \cos\varphi$, si può eliminare φ e ottenere

$$A_{2m} = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4A_m^2}{m^2}}}\ .$$

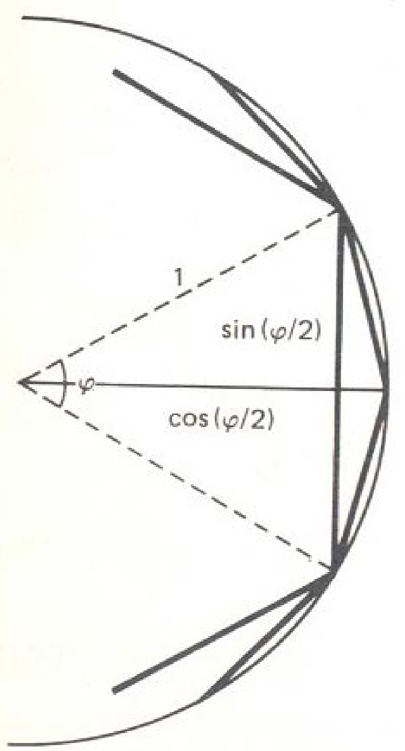

Figura 2.1

Posto $m = 2^n$ e $f_n = A_{2^n}$, la successione $\{f_n\}$, che è ovviamente crescente, verifica

$$f_{n+1} = 2^{n-1/2}\sqrt{1-\sqrt{1-4^{1-n}f_n^2}}\,. \qquad [7.5]$$

La successione $\{f_n\}$ è anche limitata (ad esempio, f_n è sempre minore di 4, l'area del quadrato circoscritto al cerchio), e quindi l'area del cerchio si può ottenere come limite della f_n:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Poiché $f_2 = 2$, si possono calcolare via via i termini della successione f_n che approssima π: si ha ad esempio $f_3 = 2\sqrt{2}$, $f_4 \approx 3{,}06$, $f_5 \approx 3{,}12$.

Occorre comunque rilevare che per il calcolo di π non viene utilizzata la successione $\{f_n\}$ ma si fa uso di espressioni derivate dal calcolo differenziale (vedi cap. 6, esercizio 6.3).

Esercizi

7.1 Dimostrare, usando la [2.1], che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

7.2 Si provi che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

(si può dimostrare direttamente, o anche usando il risultato precedente).

7.3 Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0.$$

8 Potenze con esponente reale

Tutti sanno perfettamente che cosa significa il simbolo A^4 (o A^k con k intero); si tratta infatti di moltiplicare A per sé stesso 4 volte (o k volte per ottenere A^k). Ma qual è il significato di $2^{\sqrt{2}}$? Certo non il prodotto di 2 per sé stesso $\sqrt{2}$ volte.

Vogliamo dare qui una definizione più rigorosa della potenza con esponente reale; come si vedrà, essa è meno ovvia di quanto possa sembrare a prima vista.

Osserviamo innanzitutto che è possibile definire la potenza con esponente reale (in modo che si conservino le usuali regole di operazione) solo se la base è positiva. Basterà inoltre limitarsi al caso $A > 1$ dato che, se $A < 1$, poniamo

$$A^{\alpha} = (A^{-1})^{-\alpha},$$

Abbiamo visto che non c'è problema quando α è intero. Se α è razionale, con $\alpha = n/m$, si può definire $A^{1/m}$, mediante il teorema 4.2 del capitolo 1, come quell'unico numero positivo a tale che $a^m = A$. Ciò fatto, si pone

$$A^{n/m} = (A^{1/m})^n.$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti eseguendo le operazioni in ordine inverso. Sia infatti $a = A^{1/m}$; si ha

$$(a^n)^m = (a^m)^n = A^n,$$

e dunque $a^n = (A^n)^{1/m}$, ovvero

$$(A^{1/m})^n = (A^n)^{1/m}. \qquad [8.1]$$

Abbiamo così definito A^r per qualsiasi numero razionale r. La potenza ha le seguenti proprietà:

(P_1) $A^r > 0$; $A^r > 1$ per $r > 0$ (si ricordi che $A > 1$).
(P_2) $A^r A^s = A^{r+s}$,

la prima delle quali è ovvia, mentre l'altra si dimostra facilmente riducendo r ed s allo stesso denominatore.

Dalle (P_1) e (P_2) segue subito che

(P_3) se $r < s$, allora $A^r < A^s$.

Meno immediato è, invece, mostrare che

(P_4) se $q_n \to 0$, allora $\lim_{n\to\infty} A^{q_n} = 1$.

Allo scopo, ricordiamo che si ha

$$\lim_{n\to\infty} A^{1/n} = 1$$

(vedi esempio 2.4), cosicché, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che

$$|A^{1/N} - 1| < \epsilon.$$

D'altra parte, siccome $q_n \to 0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$, si abbia

$$|q_n| < \frac{1}{N}.$$

Risulta allora, per ogni $n > \nu$,

$$|A^{q_n} - 1| \leqslant A^{|q_n|} - 1 \leqslant A^{1/N} - 1 < \epsilon,$$

e dunque la (P_4) è dimostrata.

Ciò premesso, sia α un numero reale, e sia $\{r_n\}$ una successione crescente di numeri razionali, che converge a α. La successione $\{A^{r_n}\}$ è anch'essa crescente, ed è ovviamente limitata (se m è un intero maggiore di α risulta $A^{r_n} < A^m$); per il teorema 6.1, essa sarà convergente a un limite L.

Sia ora $\{s_n\}$ una qualsiasi successione convergente a α. Si ha

$$A^{s_n} - A^{r_n} = A^{r_n}(A^{s_n - r_n} - 1).$$

La successione A^{r_n} tende a L, mentre la successione $A^{s_n - r_n}$ tende a 1 per (P_4); ne segue che anche A^{s_n} tende allo stesso limite L.

Abbiamo così dimostrato che, *comunque si prenda una successione $\{s_n\}$ di numeri razionali, convergente a α, la successione $\{A^{s_n}\}$ tende a un limite finito L, che è lo stesso per tutte le successioni convergenti a α.* E' allora naturale definire A^α come il valore di tale limite:

$$A^\alpha = \lim_{n \to \infty} A^{s_n}, \quad s_n \in \mathbf{Q}, \quad \lim_{n \to \infty} s_n = \alpha. \tag{8.2}$$

Le proprietà (P_1)-(P_4) si estendono facilmente a esponenti reali qualsiasi. Ad esempio, per dimostrare la (P_2), si prendono due successioni $s_n \to \alpha$ e $r_n \to \beta$; dalla relazione $A^{r_n} A^{s_n} = A^{r_n + s_n}$, passando al limite, si ottiene $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha + \beta}$. Infine, la ($P_4$) si estende a una qualsiasi successione $\{q_n\}$ reale, con la stessa dimostrazione. Segue immediatamente, dalla (P_4), che

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \to \infty} A^{\alpha_n} = A^\alpha, \tag{8.3}$$

una relazione che useremo in seguito.

Esercizi

8.1 Dimostrare che, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e $A > 1$, si ha

$$|A^\alpha - 1| \leqslant A^{|\alpha|} - 1.$$

***8.2** Si dimostri che, se $A_k \to A$ ($A_k, A > 0$), si ha

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n]{A_k} = \sqrt[n]{A};$$

(si usi la [4.2] del cap. 1 con $x = \sqrt[n]{A_k}$ e $x_0 = \sqrt[n]{A}$, ricordando che tutti i termini della somma sono positivi...).

8.3 Usando la [8.1], si dimostri che, se $r, s \in \mathbf{Q}$, si ha

$$(A^r)^s = (A^s)^r = A^{rs}.$$

8.4 Si provi che la formula precedente vale anche se r ed s sono reali (basterà ovviamente far vedere che $(A^r)^s = A^{rs}$. Si cominci col dimostrare che questa vale quando r è reale e s è razionale, approssimando r...).

*9 I numeri reali in forma decimale

Cercheremo qui di rendere rigorosa l'idea intuitiva che un numero irrazionale è un numero decimale illimitato aperiodico. Cominciamo con alcuni preliminari.

Abbiamo già definito $[x]$, parte intera di x, come il più grande intero che non supera x. Si definisce poi *parte frazionaria* di x il numero $\{x\} = x - [x]$. Si ha sempre $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Ad esempio

$$\left[\frac{34}{10}\right] = 3, \quad \left\{\frac{34}{10}\right\} = \frac{4}{10}, \quad \left[\frac{-42}{10}\right] = -5, \quad \left\{-\frac{42}{10}\right\} = \frac{8}{10}.$$

Ogni numero reale si scrive dunque in maniera unica come somma di un intero e di un numero compreso tra 0 e 1. Basterà pertanto rappresentare i numeri con parte intera uguale a zero, ai quali ci limiteremo in questo paragrafo. Sia dunque $0 \leqslant x < 1$. Per $k = 1, 2, 3, \ldots$, poniamo

$$c_k = [10\,\{10^{k-1} x\}]; \qquad [9.1]$$

il numero c_k è la k-esima cifra decimale di x.

Ad esempio, sia $x = 531/1000 = 0{,}531$; si ha

$$c_1 = \left[10\left\{\frac{531}{1000}\right\}\right] = \left[\frac{531}{100}\right] = 5,$$

$$c_2 = \left[10\left\{\frac{531}{100}\right\}\right] = \left[\frac{31}{10}\right] = 3,$$

$$c_3 = 1,$$

$$c_4 = c_5 = \ldots = 0.$$

In generale, poiché $\{10^{k-1} x\}$ è sempre compreso tra 0 e 1 (1 escluso), il numero $10\ \{10^k x\}$ sarà compreso tra 0 e 10 (quest'ultimo escluso), e dunque c_k sarà uno dei numeri 0, 1, 2, ..., 8, 9. Si ha

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, 10^{-k}, \qquad [9.2]$$

come segue facilmente dalla formula

$$x - \sum_{k=1}^{n} c_k\, 10^{-k} = 10^{-n}\,\{10^n x\}. \qquad [9.3]$$

La dimostrazione della [9.3] procede per induzione. Essa infatti è vera per $n=1$, dato che (si ricordi che, nel nostro caso, $\{x\}=x$)

$$x - c_1\, 10^{-1} = 10^{-1}(10x - [10\,\{x\}]) = 10^{-1}(10x - [10x]) = 10^{-1}\,\{10x\}.$$

Se ora si suppone la [9.3] vera per n, si ottiene

$$x - \sum_{k=1}^{n+1} c_k\, 10^{-k} = 10^{-n}\,\{10^n x\} - 10^{-n-1}\,[10\,\{10^n x\}] =$$

$$= 10^{-n-1}(10\,\{10^n x\} - [10\,\{10^n x\}]) =$$

$$= 10^{-n-1}\,\{10\,\{10^n x\}\} = 10^{-n-1}\,\{10^{n+1} x\},$$

in quanto risulta

$$\{10^m\,\{10^h x\}\} = \{10^{m+h} x\}. \qquad [9.4]$$

e dunque la [9.3] è dimostrata.

Dalla [9.3] segue subito

$$0 \leqslant x - \sum_{k-1}^{n} c_k\, 10^{-k} < 10^{-n}, \qquad [9.5]$$

e dunque la [9.2].

La successione $\{c_k\}$ si chiama *successione delle cifre* di x e individua, tramite la [9.2] il numero x.

In modo più suggestivo, si può scrivere

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots, \qquad [9.6]$$

che si chiama *rappresentazione decimale* di x.

Osserviamo che il decimale illimitato $0{,}9999\ldots = 0{,}\overline{9}$ non può essere ottenuto come rappresentazione di un numero reale x, con $0 \leqslant x < 1$, dato che risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 1.$$

Analogamente, nessun numero x può avere una rappresentazione decimale che, da un certo punto in poi, sia composta da tutti 9. Infatti si osservi che, se $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, 10^{-k}$, allora

$$10^n x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, 10^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} c_k\, 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\, 10^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\, 10^{n-k} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{n+j}\, 10^{-j}.$$

Se ora fosse $c_k \equiv 9$, per ogni $k>n$ si avrebbe

$$10^n x = \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{n-k} + 1,$$

e dunque $10^n x$ sarebbe intero. Ma allora $10^{k-1} x$ sarebbe intero per ogni $k>n$, e dunque $\{10^{k-1} x\}=0$ e, per la definizione [9.1], risulterebbe $c_k=0$ per $k>n$, ossia una palese contraddizione.

Ad ogni numero reale x, $0 \leqslant x < 1$ corrisponde dunque una rappresentazione decimale [9.6], le cui cifre non sono definitivamente uguali a 9, e, viceversa, ad ogni siffatta successione di cifre corrisponde un numero reale x tramite la [9.2]. Si noti che, se non si escludessero le rappresentazioni con tutti 9 da un certo punto in poi, verrebbe meno l'unicità della rappresentazione decimale: ad esempio, $0{,}5\overline{0}$ e $0{,}4\overline{9}$ indicherebbero, secondo la [9.2] lo stesso numero reale $1/2$.

Quanto poi alla differenza tra numeri razionali e irrazionali, essa è ben nota, e non sarà il caso di insistervi: ad ogni numero razionale (rapporto tra due interi) corrisponde una rappresentazione decimale periodica (contando tra queste anche quelle le cui cifre sono tutti zeri da un certo punto in poi), e viceversa ogni rappresentazione periodica dà luogo a un numero razionale. Di conseguenza i numeri decimali non periodici sono irrazionali.

Esercizi

9.1 Dimostrare la [9.4].

10 Il massimo e minimo limite

Non sempre accade che una successione abbia limite, anzi, in un certo senso, le successioni che hanno limite costituiscono un'esigua minoranza. Naturalmente, nel caso generale, la situazione è piuttosto complicata; vi sono però due numeri particolari, il massimo e il minimo limite, che svolgono un ruolo importante. Essi conservano per un verso alcune delle proprietà del limite, per un altro, invece, hanno qualche analogia con l'estremo superiore e inferiore.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Come nel caso dell'estremo superiore, se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, diremo che il suo massimo limite è $+\infty$:

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{se} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n = +\infty. \qquad [10.1]$$

Analogamente,

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \text{se} \quad \inf_{n\in\mathbf{N}} a_n = -\infty. \qquad [10.2]$$

Se la successione è limitata superiormente avrà almeno un maggiorante Q. A noi però non interessano tanto i maggioranti, quanto piuttosto i maggioranti definitivi.

Definizione 10.1 *Si dice che un numero reale M è un maggiorante definitivo per la successione* $\{a_n\}$ *se esiste un numero* ν *tale che*

$$a_n \leqslant M \quad \text{per ogni} \quad n > \nu.$$

Evidentemente, ogni maggiorante è un maggiorante definitivo, mentre, ovviamente, non è vero il viceversa; ad esempio, i maggioranti definitivi della successione $\{1/n\}$ sono tutti i numeri positivi, mentre i maggioranti sono i numeri maggiori o uguali a 1.

Definizione 10.2 *Si dice massimo limite di una successione* $\{a_n\}$ *l'estremo inferiore dell'insieme* $\mathscr{M}$ *dei maggioranti definitivi:*

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \mathscr{M}. \tag{10.3}$$

Analogamente, si dice minimo limite di una successione $\{a_n\}$ *l'estremo superiore dell'insieme* $\mathscr{N}$ *dei minoranti definitivi:*

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \mathscr{N}.$$

Il massimo limite di una successione si indica talvolta anche con i simboli

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \quad \lim_{n\to\infty}{}'' a_n,$$

e il minimo limite con

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n, \quad \lim_{n\to\infty}{}' a_n.$$

E' evidente dalla definizione che il minimo limite non può superare il massimo limite:

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Esempio 10.1

Consideriamo la successione $\{(-1)^n\}$; si vede subito che sono maggioranti definitivi tutti e soli i numeri maggiori o uguali a 1, e minoranti definitivi quelli minori o uguali a -1. Ne segue

$$\min\lim_{n\to\infty} (-1)^n = -1, \quad \max\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 1. \ \blacksquare$$

Esempio 10.2

Sia $a_n = (-1)^n/n$. Un qualsiasi numero positivo α è un maggiorante definitivo, dato che certamente $a_n < \alpha$ per $n > 1/\alpha$. Al contrario, nessun $\alpha \leqslant 0$ è maggiorante definitivo, in quanto risulta $a_n > 0 \geqslant \alpha$ per infiniti $n \in \mathbf{N}$ (esattamente per gli n pari). Allora

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Analogamente,

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \blacksquare$$

Nell'esempio precedente, il massimo e il minimo limite coincidono con il limite della successione. Questo fatto è generale, come mostra il seguente

Teorema 10.1 *Una successione $\{a_n\}$ ha limite L se e solo se*

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = \min\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Dimostrazione. Tratteremo solo il caso $L \neq \pm\infty$. Supponiamo che sia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Per ogni $\epsilon > 0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$,

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \tag{10.4}$$

(vedi definizione 3.1).

Segue dalla [10.4] che $L + \epsilon$ è un maggiorante definitivo, e $L - \epsilon$ un minorante definitivo; allora

$$L - \epsilon \leqslant \min\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant L + \epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ,

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{10.5}$$

Viceversa, sia verificata la [10.5], e sia $\epsilon > 0$. Poiché $L + \epsilon$ è un maggiorante definitivo, esisterà un numero ν_1, tale che

$$a_n \leqslant L + \epsilon, \qquad \forall n > \nu_1 \tag{10.6}$$

Analogamente, essendo $L - \epsilon$ un minorante definitivo, si potrà trovare un ν_2, tale che

$$a_n > L - \epsilon, \qquad \forall n > \nu_2. \tag{10.7}$$

Se si prende $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$, per $n > \nu$ saranno verificate ambedue le [10.6], [10.7] e dunque

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \qquad \forall n > \nu,$$

cosicché

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \blacksquare$$

Abbiamo già osservato che un maggiorante è anche un maggiorante definitivo; di conseguenza

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} a_n \leqslant \min\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n .$$

Più precisamente, varrà la seguente

Proposizione 10.1 *Se $\{a_n\}$ è una successione limitata, risulta:*

$$\max\lim_{h\to\infty} a_h = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geqslant n} a_k \tag{10.8}$$

$$\min\lim_{h\to\infty} a_h = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{k\geqslant n} a_k . \tag{10.9}$$

Dimostrazione. Dimostriamo, ad esempio, la [10.9]. Il numero $\lambda_n = \inf_{k\geqslant n} a_k$ è un minorante definitivo (risulta infatti $a_k \geqslant \lambda_n$ per $k \geqslant n$). Si ha allora

$$\min\lim_{h\to\infty} a_h \geqslant \lambda_n, \quad \forall n\in\mathbf{N},$$

e dunque

$$\min\lim_{h\to\infty} a_h \geqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n .$$

Per completare la dimostrazione della [10.9], occorre provare la disuguaglianza contraria. Sia l un minorante definitivo della successione $\{a_n\}$. Esisterà un intero n_0 tale che $a_k \geqslant l$ per ogni $k \geqslant n_0$, cosicché risulterà

$$l \leqslant \inf_{k\geqslant n_0} a_k = \lambda_{n_0} \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n .$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni minorante definitivo l, si ha anche

$$\min\lim_{h\to\infty} a_h \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n ,$$

e la [10.9] è dimostrata.

La dimostrazione della [10.8] è analoga e viene lasciata per esercizio. ■

Una ulteriore caratterizzazione del massimo limite è data dalla seguente

Proposizione 10.2 *Un numero reale L è il massimo limite della successione $\{a_n\}$ se e solo se*

(a) $\forall \epsilon > 0$ *$\exists \nu$ tale che, per ogni $n > \nu$, $a_n < L + \epsilon$;*

(b) $\forall \epsilon > 0$ *risulta, per infiniti n, $a_n > L - \epsilon$.*

Dimostrazione. La (a) equivale ad affermare che ogni numero maggiore di L è un maggiorante definitivo, e dunque alla relazione $L \geqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n$.

La (b) d'altra parte è equivalente all'affermazione che $L-\epsilon$ non è un maggiorante definitivo, quale che sia $\epsilon>0$, cioè alla relazione

$$L \leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Concludendo, (a) e (b) sono equivalenti a

$$L = \max\lim_{n\to\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Con un ragionamento analogo, si prova che

$$\lambda = \min\lim_{n\to\infty} a_n$$

se e solo se

(c) $\forall\epsilon>0 \quad \exists\nu$ tale che $\forall n>\nu,\ a_n>\lambda-\epsilon$,

(d) $\forall\epsilon>0$ risulta, per infiniti n, $a_n<\lambda+\epsilon$.

Esercizi

10.1 Si calcoli il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

(a) $a_n = \begin{cases} ne^{-n}, & n \text{ pari} \\ ne^{n}, & n \text{ dispari} \end{cases}$

(b) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

(c) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{1+n}$

(d) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+2}$

(e) $a_n = (1-\cos n\pi)n$

(f) $a_n = \cos(n\pi/4)$

(g) a_n = numero dei fattori primi che compaiono nella decomposizione di n (si ricordi che esistono infiniti numeri primi).

***10.2** Si dimostri che

$$\max\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 1,$$

$$\min\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 0;$$

($\{x\}$ è la parte frazionaria di x; vedi § 9).

10.3 Sia $a_n = \sqrt{n+1} - [\sqrt{n}]$ ($[x]$ è la parte intera di x). Si dimostri che

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \min\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(si dimostri dapprima che

$$0 \leqslant \min\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant 1,$$

quindi che

$$\lim_{n\to\infty} a_{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n^2-1} = 1).$$

10.4 Si dimostri che

$$\max\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\min\lim_{n\to\infty} a_n.$$

10.5 Si dimostri che

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n + \min\lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \min\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant$$

$$\leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n + \min\lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant$$

$$\leqslant \max\lim_{n\to\infty} a_n + \max\lim_{n\to\infty} b_n$$

(si usi la proposizione 10.1). In particolare, si faccia vedere che se $\{a_n\}$ ha limite finito risulta

$$\max\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \max\lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\min\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \min\lim_{n\to\infty} b_n.$$

10.6 Si dimostri con esempi che non è vero in generale che il massimo limite della somma sia uguale alla somma dei massimi limiti.

10.7 Si dimostri che, se $a_n \leqslant b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \min\lim_{n\to\infty} b_n; \quad \max\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \max\lim_{n\to\infty} b_n.$$

11 Successioni e topologia

In questo paragrafo vogliamo discutere le relazioni tra la teoria delle successioni e la topologia di $\mathbf{R}$ (vedi cap. 1, § 5).

Teorema 11.1 *Sia A un insieme di $\mathbf{R}$. Un punto x_0 di $\mathbf{R}$ appartiene alla chiusura di A se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A che tende a x_0.*

Dimostrazione. (a) Poiché $\mathscr{C}\overline{A}$ è aperto, se $x_0 \in \mathscr{C}\overline{A}$, esisterà un intorno $I(x_0, r)$ di x_0 nel quale non cadono punti di $\overline{A}$, dunque, a maggior ragione, punti di A. Ma allora x_0 non può essere limite di una successione $\{x_n\}$ a valori in A (perché altrimenti tutti gli x_n, tranne al più un numero finito, dovrebbero appartenere a $I(x_0, r)$).

In conclusione, se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A, convergente a x_0, allora $x_0 \in \overline{A}$.

(b) Supponiamo viceversa che $x_0 \in \overline{A} = A \cup \mathscr{D}A$, e facciamo vedere che esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A, e convergente a x_0. Se $x_0 \in A$ non c'è nulla da dimostrare, dato che basterà prendere $x_n = x_0$ per ogni n. Supponiamo allora che x_0 sia un punto di accumulazione per A. Per la definizione 5.3 del capitolo 1, ogni intorno $I(x_0, r)$ di x_0 conterrà un punto di A. In particolare possiamo prendere $r = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e ottenere una successione $\{x_n\}$ di punti di A, tali che $x_n \in I\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$, ovvero $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$. La successione $\{x_n\}$ converge evidentemente a x_0. ■

Una semplice conseguenza del teorema precedente è il

Corollario 11.1 *Un insieme $A \subset \mathbf{R}$ è chiuso se, e solo se, comunque si prenda una successione $\{x_n\}$ a valori in A e convergente, il limite della successione è ancora un elemento di A.*

Più brevemente, A è chiuso se e solo se $x_n \in A, x_n \to x_0, \Rightarrow x_0 \in A$.

Dimostrazione. (a) Sia A chiuso, e sia $\{x_n\}$ una successione convergente a valori in A. Per il teorema precedente, il suo limite x_0 appartiene ad $\overline{A} = A$.

(b) Viceversa, supponiamo che ogni successione a valori in A e convergente abbia limite in A. Sia x_0 un punto di $\mathscr{D}A$, e sia $\{x_n\}$ la successione costruita nella parte (b) del teorema precedente. Si ha $x_n \to x_0$, e dunque per l'ipotesi $x_0 \in A$. Ma allora $\mathscr{D}A \subset \subset A$, e dunque A è chiuso. ■

Prima di proseguire, occorrerà definire l'importante concetto di sottosuccessione, o successione estratta.

Definizione 11.1 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Si dice che $\{b_n\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$, o una successione estratta da $\{a_n\}$, se esiste una successione strettamente crescente di numeri interi k_n tale che*

$$b_n = a_{k_n}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

L'idea intuitiva che è alla base della definizione precedente è quella di prendere solo alcuni termini della successione $\{a_n\}$ (e precisamente i termini di indice $k_1, k_2, k_3, \ldots$) per formare una nuova successione $\{b_n\}$. La successione $\{k_n\}$ che serve per selezionare i termini si suppone strettamente crescente, per evitare ripetizioni e far sì che i termini scelti mantengano nella $\{b_n\}$ lo stesso ordine che avevano nella $\{a_n\}$.

Ad esempio sono successioni estratte da $a_n = \sqrt{n}$ le successioni $b_n = \sqrt{2n}$ $(k_n = 2n)$, $c_n = n$ $(k_n = n^2)$, $d_n = \sqrt{n^2+2}$ $(k_n = n^2+2)$.

Teorema 11.2 *Se la successione* $\{a_n\}$ *ha limite* L, *allora ogni successione estratta da* $\{a_n\}$ *ha ancora lo stesso limite.*

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$, esiste un ν tale che, per ogni $n > \nu$ risulta $a_n \in I(L, r)$ (vedi definizione 3.1).

Sia ora $b_n = a_{k_n}$ una successione estratta da $\{a_n\}$. Poiché k_n è crescente, risulta $k_n \geqslant n$; dunque, se $n > \nu$, sarà anche $k_n > \nu$ per cui

$$b_n = a_{k_n} \in I(L, r), \qquad \forall n > \nu,$$

e la successione b_n ha per limite L. ■

La dimostrazione, nel caso $L = \pm\infty$, viene lasciata per esercizio.

Se la successione $\{a_n\}$ non ha limite, è ancora possibile trovare sottosuccessioni di $\{a_n\}$ che hanno limite. In particolare, si ha la

Proposizione 11.1 *Da ogni successione* $\{a_n\}$ *si può estrarre una successione* $\{b_n\}$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n .$$

Dimostrazione. Ci limiteremo al caso di una successione limitata. Sia L il massimo limite; dalla proposizione 10.2 segue che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$L - \epsilon < a_i < L + \epsilon$$

per infiniti $i \in \mathbf{N}$.

In particolare, preso $\epsilon = 1$, potremo trovare un a_{k_1} tale che $|a_{k_1} - L| < 1$; se si considera poi $\epsilon = 1/2$, ci sarà un $k_2 > k_1$, tale che $|a_{k_2} - L| < 1/2$; quindi (prendendo $\epsilon = 1/3$) un $k_3 > k_2$, con $|a_{k_3} - L| < 1/3$, e così via.

Abbiamo così trovato una successione $\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots\}$ con $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, (dunque una successione $\{a_{k_n}\}$ estratta dalla $\{a_n\}$) tale che $|a_{k_n} - L| < 1/n$, cosicché

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = L. \ ■$$

In maniera analoga si può costruire una sottosuccessione convergente al minimo limite.

La proposizione 11.1 ha importanti conseguenze. La prima è una specie di inversione del teorema 11.2; diciamo "una specie" perché l'inverso puro e semplice del teorema è ovvio, dato che tra le sottosuccessioni di $\{a_n\}$ c'è la successione $\{a_n\}$ stessa $(k_n = n)$.

Teorema 11.3 *Siano* $\{a_n\}$ *una successione e* $a \in \mathbf{R}$. *Se da ogni sottosuccessione della* $\{a_n\}$ *si può estrarre una successione che converge ad a, allora*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Dimostrazione. Sia L il massimo limite di a_n, e sia $\{b_n\}$ una sottosuccessione che tende a L. Dalla $\{b_n\}$ si può estrarre per ipotesi una successione che converge ad a, dunque per il teorema 11.2 risulta $a = L = \max\lim_{n \to \infty} a_n$.

Analogamente, si dimostra che $a = \min\lim_{n \to \infty} a_n$, e dunque, per il teorema 10.1, la successione $\{a_n\}$ ha limite a. ■

Un secondo risultato è l'importante

Teorema 11.4 (di Weierstrass) *Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente.*

Dimostrazione. Ad esempio, si può prendere una sottosuccessione che converga al massimo limite. ■

Per finire, introduciamo un nuovo concetto che sarà molto usato nel seguito.

Definizione 11.2 *Un insieme* $Q \subset \mathbf{R}$ *si chiama compatto per successioni (o sequenzialmente compatto) se da ogni successione a valori in* Q *si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di* Q.

Nel seguito, invece che compatto per successioni, diremo, più brevemente, compatto.

Teorema 11.5 *Sono compatti in* $\mathbf{R}$ *tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati.*

Dimostrazione. Sia Q chiuso e limitato, e sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione a valori in Q. Per il teorema di Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{x_n^*\}$ convergente a un punto x_0, che appartiene a Q per il corollario 11.1. Ne segue che Q è compatto.

Viceversa, sia Q un compatto di $\mathbf{R}$. Cominciamo a dimostrare che Q è limitato. Se ciò non fosse, si avrebbe ad esempio $\sup Q = +\infty$, ed esisterebbe una successione $\{x_n\}$ a valori in Q, tendente a $+\infty$ (vedi esercizio 11.2). Poiché ogni successione estratta da questa tende anche a $+\infty$ (teorema 11.2), non è possibile estrarre da $\{x_n\}$ alcuna successione convergente, e Q non potrebbe essere compatto.

Resta da mostrare che Q è chiuso.

Sia $x_0 \in \overline{Q}$; per il teorema 11.1, esiste una successione $\{x_n\}$, a valori in Q, che converge a x_0. D'altra parte, poiché Q è compatto, dalla $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di Q. Ora, ogni successione estratta da $\{x_n\}$ converge a x_0, e dunque $x_0 \in Q$, cosicché Q risulta chiuso. ■

Esercizi

11.1 Dimostrare che un insieme $A \subset \mathbf{R}$ è aperto se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$ che converge a un punto $x_0 \in A$, si ha definitivamente $x_n \in A$.

11.2 Dimostrare che, se $L = \sup A$, esiste una successione a valori in A che tende a L.

***11.3** Un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si dice *punto limite* per la successione $\{x_n\}$ se esiste una successione estratta da $\{x_n\}$ che converge a x_0. Si dimostri che:
(a) il massimo e minimo limite di una successione limitata sono punti limite di $\{x_n\}$;
(b) l'insieme dei punti limite è chiuso,
(c) il massimo e minimo limite di una successione limitata sono il più grande e il più piccolo dei punti limite.

11.4 Si dia l'esempio di una successione priva di punti limite.

11.5 Sia $a_n = (-1)^n$. Trovare una successione estratta che converga.

11.6 Dimostrare che, se una successione limitata $\{x_n\}$ ha un solo punto limite x_0, allora $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

11.7 Sia $\{a_n\}$ una successione. Si dimostri che, se

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n} = \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = L,$$

allora la successione a_n ha limite L.

12 Il criterio di Cauchy

Se si vuol dimostrare che una successione $\{a_n\}$ è convergente, ciò che occorre (tranne nel caso di successioni monòtone, dove il limite coincide con l'estremo superiore o inferiore) è, in primo luogo, farsi un'idea del possibile limite della successione, quindi usare la definizione o qualche teorema sui limiti per dimostrare che il numero pensato era proprio il limite di $\{a_n\}$.

In altre parole, la definizione di limite è utile, in un certo senso, solo a posteriori, se si conosce già, o almeno se si può ragionevolmente congetturare quale sia il limite della successione data.

Molte volte, però, è utile poter dimostrare che una certa successione converge, senza saperne in partenza il limite, che anzi spesso resta sconosciuto, anche quando si sia provata la convergenza della successione. A questa esigenza, fa fronte il cosiddetto criterio di Cauchy.

Definizione 12.1 *Diremo che una successione $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy (o fondamentale) se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero reale ν tale che, per ogni n,*

$m>\nu$, si abbia

$$|a_n-a_m|<\epsilon.$$

Se si confronta questa definizione con la definizione (A_1) del paragrafo 3, si nota che esse differiscono solo nel fatto che, nella definizione di successione di Cauchy, non viene fatta menzione dell'eventuale limite della successione, al cui posto compare un secondo termine a_m.

Teorema 12.1 (criterio di convergenza di Cauchy) *Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione

(a) Se la successione ha limite L, allora, per ogni $\epsilon>0$, esiste un $\nu\in\mathbf{R}$ tale che, per ogni $n>\nu$, si abbia $|a_n-L|<\epsilon/2$. Se anche m è maggiore di ν, si ha $|a_m-L|<\epsilon/2$ e quindi, per $n, m>\nu$,

$$|a_n-a_m|\leqslant|a_n-L|+|a_m-L|<\epsilon.$$

(b) Supponiamo viceversa che la successione $\{a_n\}$ sia di Cauchy. Cominciamo col far vedere che è limitata.

Allo scopo, sia n_0 un numero tale che, per ogni $n, m\geqslant n_0$, risulti $|a_n-a_m|<1$. In particolare, si può prendere $m=n_0$, cosicché $|a_n-a_{n_0}|<1$ per ogni $n\geqslant n_0$. Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 3.2, si conclude che, per ogni $n\in\mathbf{R}$,

$$|a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{n_0}|+1,$$

cosicché la successione $\{a_n\}$ è limitata.

Per il teorema di Weierstrass 11.4, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ convergente a un numero L.

Fissato $\epsilon>0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni n, $m>\nu$, risulti

$$|a_n-a_m|<\frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte, solo un numero finito di termini della successione $\{a_{k_n}\}$ cadrà fuori di $I(L, \epsilon/2)$, e dunque esisterà un $\bar{n}>\nu$, tale che

$$|a_{\bar{n}}-L|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Allora, per ogni $n>\nu$,

$$|a_n-L|\leqslant|a_n-a_{\bar{n}}|+|a_{\bar{n}}-L|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

e dunque tutta la successione a_n tenderà a L. ∎

Si noterà che nella definizione 12.1 i numeri n e m entrano simmetricamente; potremo allora supporre, ad esempio, che sia $m>n$, dunque $m=n+p$, per qualche

$p \in \mathbf{N}$. Una successione è allora di Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists \nu$ tale che $\forall n > \nu$ e $\forall p \in \mathbf{N}$ si ha

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Quest'ultima formulazione è molto comoda per le serie; infatti, in questo caso, occorre considerare la convergenza della successione delle somme parziali $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Dal criterio di Cauchy segue, allora, che *una serie Σa_i è convergente se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$, e ogni intero p, si ha*

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon. \qquad [12.1]$$

In particolare, si può prendere $p=1$ nella [12.1], cosicché, se una serie Σa_n è convergente, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ν tale che

$$|a_{n+1}| < \epsilon, \qquad \forall n > \nu.$$

Ricordando la definizione di limite, abbiamo il seguente

Teorema 12.2 *Condizione necessaria affinché una serie Σa_n sia convergente è che*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \qquad [12.2]$$

Si noti che *la condizione* [12.2] *non è sufficiente* a garantire la convergenza della serie, come si vede dal seguente

Esempio 12.1

La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ è divergente. Risulta infatti

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \qquad [12.3]$$

e dunque si ha

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > s_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = s_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) > s_8 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\vdots$$

e, in generale,

$$s_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}, \qquad [12.4]$$

cosicché la successione delle somme parziali non è limitata e quindi la serie diverge. ■

Esercizi

12.1 Dimostrare per induzione la [12.4].

12.2 Mostrare che la serie armonica non è convergente, facendo vedere come, dalla [12.3], segua che la successione delle somme parziali non è di Cauchy (si prenda $\epsilon = 1/2$ nella [12.1]).

*13 I numeri reali come completamento dei razionali

Abbiamo visto in precedenza come dall'assioma di Dedekind (D) discendano sia il principio di Archimede (cap. 1, proposizione 4.3) che il criterio di Cauchy.

In realtà, l'assioma di continuità (D) è equivalente a questi due, nel senso che esso può essere dedotto a partire da essi.

Assumiamo dunque come assiomi il principio di Archimede,

(A) *Dati dei numeri reali positivi $a < b$, esiste un intero N tale che*

$$Na > b,$$

e il principio di Cauchy,

(C) *Ogni successione di Cauchy è convergente*,

e facciamo vedere che ogni sezione in $\mathbf{R}$ ha un elemento separatore.

Sia dunque (A, B) una sezione, e sia $a \in A$ e $b \in B$. Se dividiamo $[a, b]$ in due intervalli uguali $[a, (a+b)/2]$ e $[(a+b)/2, b]$, uno dei due conterrà sia punti di A che di B, mentre l'altro sarà contenuto in A o in B.

Denominiamo $[a_1, b_1]$ quello che contiene punti di ambedue gli insiemi A e B, e continuiamo a dividere con lo stesso metodo. Otterremo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, l'una a valori in A, l'altra a valori in B, con

$$b_n - a_n = (b-a)\, 2^{-n}. \qquad [13.1]$$

Le due successioni sono di Cauchy; infatti, i termini con indice maggiore di n appartengono tutti all'intervallo $[a_n, b_n]$, e dunque sarà

$$|a_m - a_k| < \frac{b-a}{2^n}, \qquad \forall m, k > n,$$

e, analogamente,

$$|b_m - b_k| < \frac{b-a}{2^n}, \qquad \forall m, k > n.$$

Poiché ogni successione di Cauchy converge, si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$, e, per la [13.1], $\lim_{n\to\infty} b_n = \lambda$.

Il numero λ è l'elemento separatore di (A, B). Infatti se $a \in A$ risulta $a < b_n$, e dunque, passando al limite, $a \leqslant \lambda$; analogamente, se $b \in B$ si ha $a_n < b$, e dunque $\lambda \leqslant b$. ∎

Osserviamo che, malgrado non sia stato esplicitamente usato, il principio di Archimede entra nella dimostrazione, in quanto occorre utilizzarlo per mostrare che $(b-a)/2^n$ tende a zero (in effetti, il principio di Archimede è necessario anche per dimostrare che $1/n$ tende a zero).

Osservazione 13.1. Le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ costruite sopra sono evidentemente monotòne. La stessa dimostrazione prova allora che è equivalente all'assioma di Dedekind la proposizione (A), insieme alla

(C_1) *Ogni successione monotòna e limitata è convergente.* ∎

Osservazione 13.2. Un assioma che, unitamente al principio di Archimede, può essere sostituito al principio di Dedekind è il seguente assioma di Cantor:

(C_2) *Ogni successione di intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$, tali che*

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots \tag{13.2}$$

ha intersezione non vuota.

Infatti, se vale il principio di Dedekind, il numero $\lambda = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ appartiene a tutti gli intervalli I_n.

Supponiamo viceversa che valgano l'assioma di Cantor e il principio di Archimede, e sia (A, B) un'arbitraria sezione di $\mathbf{R}$. Procedendo come sopra, otteniamo una successione di intervalli I_n che verificano la [13.2], e che dunque ha intersezione non vuota. In effetti, l'intersezione è costituita da un solo elemento λ, perché se ne contenesse due, λ e μ, questi dovrebbero appartenere a tutti gli intervalli I_n, e dunque si dovrebbe avere

$$0 < |\lambda - \mu| \leqslant (b-a)\, 2^{-n},$$

il che è impossibile perché il secondo membro tende a zero.

Facciamo vedere che λ è l'elemento separatore di (A, B). Per questo, consideriamo un numero $a < \lambda$. Poiché la successione $\{a_n\}$ tende a λ, per il teorema 4.2 (della permanenza del segno) risulterà definitivamente $a_n > a$, e quindi, dato che $a_n \in A$, si avrà anche $a \in A$. Analogamente si dimostra che tutti i numeri maggiori di λ appartengono a B, e dunque λ è l'elemento separatore. ■

In definitiva, si ha

$$(D) \Leftrightarrow (A) \cup (C) \Leftrightarrow (A) \cup (C_1) \Leftrightarrow (A) \cup (C_2).$$

Infine, è ancora equivalente a (D) l'assioma:

(E) *Ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore*,

la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

L'assioma di Dedekind e il principio di Cauchy sono simmetrici anche sotto un altro punto di vista; infatti, come a partire dalle sezioni di **Q** si è costruito un modello di **R**, così si può fare a partire dalle successioni di Cauchy in **Q**.

Osserviamo innanzitutto che *la definizione di limite, e quella di successione di Cauchy, possono essere date usando esclusivamente numeri razionali*, cosicché si può parlare di successione di Cauchy in **Q** e di limite di una successione in **Q** (limite che dovrà, ovviamente, essere un numero razionale). E' subito visto che non tutte le successioni di Cauchy a valori razionali hanno limite in **Q**: ad esempio non ha limite la successione delle somme parziali della serie esponenziale [6.5].

Consideriamo allora l'insieme $\mathscr{A}$ delle successioni di Cauchy a valori in **Q**. In $\mathscr{A}$ introduciamo la seguente relazione di equivalenza: diciamo che $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ se si ha

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

E facile verificare che la relazione "$\sim$" è una relazione di equivalenza, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva.

L'insieme quoziente di $\mathscr{A}$ rispetto alla relazione di equivalenza "$\sim$" sarà l'insieme **R** dei numeri reali. Un numero reale α sarà dunque una classe di successioni di Cauchy in **Q** tra loro equivalenti; per individuarlo, basterà dare un suo rappresentante $\{a_n\}$; cioè una successione della classe α.

Ad esempio, il numero reale e è la classe delle successioni, a valori in **Q**, equivalenti alla successione $\{(1+1/n)^n\}$, o anche alla successione $\left\{ \sum_{h=0}^{n} 1/h! \right\}$.

Per vedere che **R** è effettivamente un modello per i numeri reali, occorre definire in **R** una somma, un prodotto e un ordinamento totale, in modo che siano verificati gli assiomi del paragrafo 1 (cap. 1) e l'assioma (D) di Dedekind.

La somma e il prodotto sono definiti naturalmente come segue: *se* $\{a_n\} \in \alpha$ *e* $\{b_n\} \in \beta$ *definiremo* $\alpha + \beta$ *come la classe delle successioni equivalenti a* $\{a_n + b_n\}$ *e* $\alpha\beta$ *come la classe individuata da* $\{a_n\, b_n\}$.

E' facile vedere che tale definizione non dipende dalla scelta dei rappresentanti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Se si definiscono come 0 e 1 i numeri reali individuati dalle successioni $\{0\}$ $(a_n = 0)$ e $\{1\}$, l'opposto di α come il numero $-\alpha$ individuato da $\{-a_n\}$ e l'inverso di un numero $\alpha \neq 0$ come il numero α^{-1} individuato[4] dalla successione $\{1/a_n\}$, si vede facilmente che sono verificati gli assiomi (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), (C_1), (C_2), (C_3), (C_4), (BC).

Un po' più delicata è la definizione dell'ordinamento totale su $\mathbf{R}$:

Definizione 13.1 *Sia $\alpha \in \mathbf{R}$, diremo che $\alpha \geqslant 0$, se esiste una successione $\{a_n\} \in \alpha$ tale che risulti definitivamente $a_n \geqslant 0$. Se β e γ sono due numeri reali, diremo che $\beta \geqslant \gamma$ se $\beta - \gamma \geqslant 0$.*

Le proprietà transitiva e riflessiva, come anche le proprietà (AB) e (AC) del paragrafo 1 (cap. 1), sono evidenti; un po' meno lo è la proprietà antisimmetrica.

Per dimostrare quest'ultima, basterà far vedere che, se $\alpha \geqslant 0$ e $\alpha \leqslant 0$, allora $\alpha = 0$. Siano dunque $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due rappresentanti del numero α, con $a_n \geqslant 0$ e $b_n \leqslant 0$ per ogni n abbastanza grande. Si ha, per tali n,

$$0 \leqslant a_n \leqslant a_n - b_n,$$

e, poiché le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono equivalenti,

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Ma, allora, anche $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, cosicché $\alpha = 0$.

Per completare la dimostrazione delle proprietà del paragrafo 1 (cap. 1) resta da far vedere che l'ordinamento della definizione 13.1 è un ordinamento totale, cioè che è verificata la proprietà (A_1). A questo scopo basterà dimostrare che se $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta $\alpha \geqslant 0$ oppure $\alpha \leqslant 0$.

Sia $\{a_n\}$ un rappresentante di α, e si considerino le successioni $\{|a_n|\}$ e $\{-|a_n|\}$. Per la disuguaglianza triangolare [2.2], queste successioni sono di Cauchy, e così anche le successioni

$$b_n = |a_n| - a_n$$

$$c_n = |a_n| + a_n.$$

Si osservi ora che, per ogni intero n, almeno uno dei due numeri b_n e c_n è zero, e dunque almeno una delle due successioni $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ (ad esempio $\{b_n\}$) avrà infiniti termini nulli.

Poiché $\{b_n\}$ è di Cauchy, si dovrà avere $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$, e dunque le successioni $\{a_n\}$ e $\{|a_n|\}$ sono equivalenti, cosicché $\alpha \geqslant 0$.

Analogamente, se è $\{c_n\}$ ad avere infiniti termini nulli, sarà $\alpha \leqslant 0$.

In questo modo abbiamo verificato che l'insieme $\mathbf{R}$ gode delle proprietà elencate nel paragrafo 1 (cap. 1). Rimane da verificare l'assioma di Dedekind.

Prima di tutto, è opportuno osservare che è possibile identificare il numero razio-

[4] In linea di principio si dovrebbe supporre che tutti gli a_n siano diversi da zero. Non è comunque difficile provare che, se $\alpha \neq 0$, esiste un rappresentante $\{a_n\}$ di α, con $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Si può allora dimostrare che la successione $\{1/a_n\}$ è di Cauchy, con un ragionamento analogo a quello della proposizione 4.1 (j_4).

nale r con il numero reale definito dalla successione costante $\{r\}$. *In questo modo si può considerare* $\mathbf{Q}$ *come sottoinsieme di* $\mathbf{R}$.

Fatta questa considerazione, sia (A, B) una sezione in $\mathbf{R}$. Vogliamo far vedere che esiste un elemento separatore. Siano a un elemento di A e b uno di B; possiamo supporre che a e b siano razionali. Se si suddivide via via l'intervallo $[a, b]$ come all'inizio del paragrafo, si ottengono due successioni equivalenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri razionali che individuano un numero reale λ, che è l'elemento separatore di (A, B). La verifica è lasciata per esercizio.

14 Criteri di convergenza per le serie a termini positivi

Abbiamo già visto nel paragrafo 6 che le serie a termini positivi sono convergenti non appena la successione delle somme parziali è limitata; tale costatazione è alla base del criterio del confronto (teorema 6.2). Molto utile per il confronto è la serie geometrica, che può essere usata sia comparandola direttamente con la data, come negli esempi 6.1 e 6.2, sia indirettamente, come si vede nei teoremi che seguono.

Teorema 14.1 (criterio della radice) *Sia* Σa_n *una serie a termini non negativi. Se esistono un numero* k, $0<k<1$, *e un intero* n_0 *tale che, per ogni* $n \geqslant n_0$, *risulti*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant k,$$

allora la serie Σa_n *è convergente.*

Dimostrazione. Per $n \geqslant n_0$ risulta $a_n \leqslant k^n$ e poiché la serie geometrica Σk^n è convergente, lo sarà anche la serie Σa_n. ∎

Teorema 14.2 (criterio del rapporto) *Sia* Σa_n *una serie a termini positivi. Se esistono un* k, $0<k<1$, *e un intero* n_0 *tali che, per* $n \geqslant n_0$, *risulti*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant k,$$

allora la serie Σa_n *è convergente.*

Dimostrazione. Per $n \geqslant n_0$ si avrà

$$a_n \leqslant k a_{n-1} \leqslant k^2 a_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant k^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Poiché la serie

$$\frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} \Sigma k^n$$

è convergente, per il criterio del confronto convergerà anche la serie Σa_n. ∎

I teoremi 14.1 e 14.2 possono essere posti in una forma più maneggevole.

Corollario 14.1 *Sia Σa_n una serie a termini non negativi. Se*

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

allora la serie converge.

Se invece risulta

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

allora la serie Σa_n diverge.

Dimostrazione. Sia $L<1$. Per ogni $\epsilon>0$ esisterà un $\nu \in \mathbf{R}$ tale che, per ogni $n>\nu$,

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\epsilon$$

(vedi proposizione [10.2]).

In particolare, se si sceglie $\epsilon=(1-L)/2$, esiste un $n_0 \in N$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{1+L}{2}, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Poiché $(1+L)/2<1$, possiamo applicare il teorema 14.1 e concludere che la serie Σa_n converge.

Se invece è $L>1$, allora, per infiniti n, deve risultare $\sqrt[n]{a_n}>1$, e quindi $a_n>1$. Ma, in tal caso non è verificata la condizione necessaria

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

e quindi la serie Σa_n non può convergere. ■

Un analogo risultato si può formulare rifacendosi al criterio del rapporto: se Σa_n è una serie a termini positivi e se

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

allora la serie converge. Si osservi che, contrariamente a quanto avviene per il criterio della radice, se $L>1$ non si può concludere che la serie diverge, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 14.1

Consideriamo la successione

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, dato che risulta $a_n \leqslant 2^{-n}$. D'altra parte non è difficile vedere che si ha:

$$\max_{n \to \infty} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty. \blacksquare$$

Osservazione 14.1. Il criterio del rapporto, benché sia di una certa importanza nelle applicazioni, è meno generale di quello della radice. Infatti se una serie verifica le ipotesi del teorema 14.2, allora verifica anche quelle del corollario 14.1, e dunque del teorema 14.1.

Per dimostrare la nostra asserzione, supponiamo che per $n \geqslant n_0$ sia $a_{n+1}/a_n \leqslant \leqslant k < 1$. Avremo allora

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}} k^n, \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

e quindi

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant k \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}}, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Da quest'ultima segue immediatamente:

$$\max_{n \to \infty} \lim \sqrt[n]{a_n} \leqslant k \max_{n \to \infty} \lim \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}} = k < 1$$

dato che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}} = 1 \quad \text{(vedi esempio 2.4).} \blacksquare$$

Esempio 14.2

La serie $\Sigma(n^2+1)/2^n$ è convergente. Infatti si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2+1} = \frac{1}{2} < 1. \blacksquare$$

Esempio 14.3

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ è convergente. Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1. \blacksquare$$

I criteri della radice e del rapporto sono inapplicabili quando avviene che

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

o che

$$\max\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Un caso tipico è quello della serie $\Sigma\, 1/n^\alpha$, che, come vedremo, converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leqslant 1$.

Teorema 14.3 (di Cauchy) *Sia $\{a_n\}$ una successione positiva e decrescente. Allora le due serie Σa_k e $\Sigma\, 2^k a_{2^k}$ sono ambedue convergenti o ambedue divergenti.*

Dimostrazione. Si ha

$$a_1 \leqslant a_1$$

$$a_2 + a_3 \leqslant 2a_2$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leqslant 4a_4$$

$$\ldots$$

e analogamente

$$a_1 \geqslant \frac{1}{2} a_1$$

$$a_2 \geqslant \frac{1}{2} 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geqslant \frac{1}{2} 4a_4$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geqslant \frac{1}{2} 8a_8$$

$$\ldots$$

Se ora si indicano con s_n le somme parziali della serie Σa_i, e con σ_n quelle della serie $\Sigma\, 2^i a_{2^i}$, si ottiene dalle relazioni precedenti:

$$s_{2^{n+1}-1} \leqslant \sigma_n, \qquad [14.1]$$

$$s_{2^n} \geqslant \frac{1}{2} \sigma_n. \qquad [14.2]$$

Segue dalle [14.1] e [14.2] che se la successione $\{\sigma_n\}$ è limitata, altrettanto accade alla $\{s_n\}$ e viceversa, e che dunque le due serie sono ambedue convergenti o ambedue divergenti. ■

Esempio 14.4
La serie $\Sigma\ 1/n^\alpha$ *è convergente per* $\alpha > 1$, *divergente per* $\alpha \leqslant 1$.

Infatti la successione $1/n^\alpha$ è decrescente (per $\alpha > 0$; ma se $\alpha \leqslant 0$ la serie è ovviamente divergente, non essendo verificata la condizione necessaria [12.2]) e si può applicare il teorema precedente. Si ha

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = (2^{1-\alpha})^n;$$

la serie $\Sigma\, 2^n a_{2^n}$ è dunque la serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$, che converge se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè se $\alpha > 1$, e diverge se $\alpha \leqslant 1$. ■

Esercizi

14.1 Dire se convergono le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

14.2 Dimostrare che, se $a_n \geqslant 0$ e se $\Sigma\, a_n$ converge, allora anche $\Sigma\, a_n^2$ converge. E' vero il viceversa?

14.3 Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

14.4 Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ sono convergenti le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x (\ln n)^2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}.$$

14.5 Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-2}{2n-1}\right)$$

è convergente e, in caso affermativo, calcolarne la somma.

14.6 Sia $\Sigma\, a_n$ una serie a termini positivi. Dimostrare che, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1,$$

allora la serie $\Sigma\, a_n$ non converge.

14.7 Dimostrare per induzione le formule [14.1] e [14.2].

15 Altri criteri di convergenza

Esamineremo in questo paragrafo il comportamento delle serie con termini di segno variabile, ricercando per queste dei criteri di convergenza. Il risultato più generale è il seguente

Teorema 15.1 *Sia $\Sigma\, a_n$ una serie e supponiamo che sia convergente la serie $\Sigma\, |a_n|$. Allora anche $\Sigma\, a_n$ è convergente e si ha*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{15.1}$$

Dimostrazione. Si considerino le due successioni

$$b_n = \max(a_n, 0), \quad c_n = \max(-a_n, 0).$$

Si ha

$$0 \leqslant b_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant c_n \leqslant |a_n|$$

e, per il teorema del confronto, le due serie $\Sigma\, b_n$ e $\Sigma\, c_n$ saranno convergenti, cosicché risulterà tale anche la serie $\Sigma\, a_n$, dato che $a_n = b_n - c_n$. Si ha inoltre

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene la [15.1]. ∎

Una serie $\Sigma\, a_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\Sigma\, |a_n|$. Il teorema 15.1 si può enunciare dicendo che *ogni serie assolutamente convergente è convergente*.

Esempio 15.1
La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

è convergente. Infatti si ha

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

e dunque per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è assolutamente convergente. ■

Esempio 15.2

Dire per quali $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

è convergente.

Vediamo per quali x la serie data è assolutamente convergente, cioè dove è convergente la serie

$$\Sigma n^2 2^{-n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^n.$$

Applicando a quest'ultima il criterio della radice, si trova

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 2^{-n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^n} = \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x+1}\right| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x+1}\right|,$$

cosicché la serie convergerà assolutamente per quei valori di x per cui

$$|x| < 2|x+1|,$$

cioè per $x > -2/3$ e per $x < -2$.

Se $-2 \leqslant x \leqslant -2/3$ si ha

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| \geqslant 2,$$

e quindi

$$n^2 2^{-n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^n \geqslant n^2,$$

cosicché per tali x la serie non può convergere, in quanto non è verificata la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \blacksquare$$

Il teorema 15.1 rappresenta, in pratica, l'unico criterio generale per la serie con termini di segno variabile.

Un caso particolare di un certo interesse è quello delle serie a termini di segno alterno, cioè quelle i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

Definizione 15.1 *Se $\{a_n\}$ è una successione positiva, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

si dice serie a termini di segno alterno.

Per questo tipo di serie sussiste il seguente

Teorema 15.2 (criterio di Leibniz) *Sia $\Sigma (-1)^n a_n$ $[a_n > 0]$ una serie a termini di segno alterno.*

Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente e che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali della serie $\Sigma (-1)^n a_n$. Si ha, tenuto conto della monotonia della successione $\{a_n\}$,

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant s_{2n},$$
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant s_{2n-1},$$
$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leqslant s_{2n}.$$

Pertanto la successione $\{s_{2n}\}$ è decrescente e la $\{s_{2n+1}\}$ è crescente. Inoltre, si ha

$$s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant \ldots \leqslant s_2 = -a_1 + a_2,$$

$$s_{2n} \geqslant s_{2n+1} \geqslant \ldots \geqslant s_1 = -a_1,$$

cosicché $\{s_{2n}\}$ è limitata inferiormente e $\{s_{2n+1}\}$ è limitata superiormente.

Si può allora concludere che esistono finiti i limiti

$$S = \lim_{n \to \infty} s_{2n} \quad \text{e} \quad \sigma = \lim_{n \to \infty} s_{2n+1}.$$

D'altra parte, si ha

$$S - \sigma = \lim_{n \to \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0,$$

e quindi (vedi esercizio 11.7) esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S = \sigma,$$

cosicché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente. ■

Esempio 15.3

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

è convergente. Infatti, la successione $a_n = 1/n$ è positiva, decrescente e ha limite zero. Si può allora applicare il teorema precedente e concludere che la serie è convergente.

Si noti che la serie

$$\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$$

non è assolutamente convergente, perché la serie dei valori assoluti

$$\Sigma \frac{1}{n}$$

è divergente (vedi esempi 12.1 e 14.4). ■

Esempio 15.4

Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Vediamo, dapprima, dove la serie converge assolutamente. Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = |x| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^{-1/2}} = |x|,$$

per cui la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Se $|x| > 1$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

e quindi la serie non converge.

Resta da esaminare il comportamento della serie per $x = \pm 1$. Per $x = 1$ la serie data diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

che non converge (vedi esempio 14.4).

Per $x = -1$ si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che è una serie a termini di segno alterno, convergente per il teorema 15.2.

In conclusione, la serie converge per $-1 \leqslant x < 1$ e non converge per x esterno all'intervallo $[-1, 1)$. In particolare, la serie è divergente per $x \geqslant 1$ ed è indeterminata per $x < -1$. ■

Esercizi

15.1 Dire se sono convergenti le serie seguenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

15.2 Dire se è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+9}.$$

15.3 Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ sono convergenti le serie seguenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{(1+x)^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+e^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

*(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2+x^{2n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$.

15.4 Nell'esercizio 14.2 si può eliminare l'ipotesi $a_n \geqslant 0$?

*16 Riordinamento dei termini di una serie

Una proprietà delle somme finite è che qualsiasi cambiamento dell'ordine dei termini (o, come si suol dire, qualsiasi riordinamento dei termini) lascia inalterato il valore della somma.

E' possibile estendere questo risultato alle serie? Innanzi tutto, occorre definire che cosa si intenda per riordinamento di una serie; infatti, mentre per somme finite non c'è difficoltà, ad esempio, a sommare i termini in ordine inverso, ciò non è più possibile per le serie.

Definizione 16.1 *Siano Σa_n e $\Sigma \alpha_n$ due serie. Diremo che $\Sigma \alpha_n$ è un riordinamento della serie Σa_n se esiste un'applicazione biunivoca (o bigettiva)*[5] $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *tale che*

$$\alpha_n = a_{k(n)}.$$

E' chiaro che se $\Sigma \alpha_n$ è un riordinamento di Σa_n, anche Σa_n sarà un riordinamento di $\Sigma \alpha_n$.

Con questa definizione, ci possiamo chiedere se la convergenza di una serie implichi quella di ogni suo riordinamento.

Si ha il seguente

Teorema 16.1 *Se la serie Σa_n è assolutamente convergente e $\Sigma \alpha_n$ è un suo riordinamento, allora anche $\Sigma \alpha_n$ è assolutamente convergente e si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Dimostrazione. Supponiamo, dapprima, che la serie Σa_n (e quindi anche $\Sigma \alpha_n$) sia a termini non negativi. Indicando con $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ le successioni delle somme parziali relative alle due serie, e ponendo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

si ottiene

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = a_{k(1)} + a_{k(2)} + \cdots + a_{k(n)} \leqslant S;$$

quindi le serie $\Sigma \alpha_n$ converge, e si ha

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leqslant S.$$

[5] Ricordiamo che un'applicazione $f : A \to B$ si dice biunivoca quando è iniettiva e surgettiva, cioè quando ogni elemento di B proviene da uno e un solo elemento di A.

D'altra parte, anche Σa_n è un riordinamento di $\Sigma \alpha_n$, e ripetendo il ragionamento precedente si ottiene $S \leqslant \sigma$, da cui

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sigma.$$

Se ora Σa_n non è una serie a termini positivi, si ponga

$$b_n = \max(a_n, 0),$$
$$c_n = \max(-a_n, 0),$$

e analogamente,

$$\beta_n = \max(\alpha_n, 0), \qquad \gamma_n = \max(-\alpha_n, 0).$$

Si ha allora:

$$0 \leqslant b_n \leqslant |a_n|, \qquad 0 \leqslant c_n \leqslant |a_n|,$$
$$0 \leqslant \beta_n \leqslant |\alpha_n|, \qquad 0 \leqslant \gamma_n \leqslant |\alpha_n|,$$

e inoltre,

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - c_n, \qquad & |a_n| &= b_n + c_n, \\ \alpha_n &= \beta_n - \gamma_n, \qquad & |\alpha_n| &= \beta_n + \gamma_n. \end{aligned} \qquad [16.1]$$

Poiché la serie $\Sigma |a_n|$ è convergente, saranno convergenti anche le serie Σb_n e Σc_n (a termini positivi). D'altra parte, le serie $\Sigma \beta_n$ e $\Sigma \gamma_n$ sono riordinamenti delle serie Σb_n e Σc_n rispettivamente. Ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

e la tesi segue dalle uguaglianze [16.1]. ■

Il teorema appena dimostrato può sembrare a prima vista evidente, e valido anche per serie convergenti, ma non assolutamente convergenti. In realtà, una tale impressione si rivela errata: consideriamo infatti la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = \log 2.$$[6]

Se moltiplichiamo per 1/2, otteniamo

$$+\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{4} \qquad +\frac{1}{6} \qquad -\frac{1}{8} \qquad +\frac{1}{10} - \cdots = \frac{1}{2}\log 2.$$

[6] Per quello che segue, la conoscenza della somma della serie non è essenziale; basta che la serie a primo membro converga (teorema 15.2) e che la sua somma S sia diversa da 0.

Sommando, e combinando tra loro i termini disposti uno sotto l'altro, si ricava

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2.$$

Quest'ultima serie si può ottenere dalla prima riordinando i termini, mentre il valore della somma è stato moltiplicato per 3/2.

Per capire la ragione di questo apparente paradosso, consideriamo una serie Σa_n, e, accanto a questa, le serie Σb_n, e Σc_n, con

$$\begin{aligned} b_n &= \max(a_n, 0), \\ c_n &= \max(-a_n, 0). \end{aligned} \qquad [16.2]$$

Il comportamento della serie Σa_n è determinato da quello delle altre due; infatti, se ambedue le serie Σb_n e Σc_n convergono, la serie Σa_n sarà assolutamente convergente; e se una sola delle due diverge, la serie Σa_n, sarà anch'essa divergente.

Il caso più complicato è quello in cui ambedue le serie Σb_n e Σc_n sono divergenti; quando ciò avvenga, la serie Σa_n non potrà convergere assolutamente, ma, se nella successione $\{a_n\}$ i termini positivi e negativi si alternano opportunamente, la serie Σa_n potrà risultare convergente.

E' questo il caso, ad esempio, della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

considerata sopra.

Non sarà allora motivo di meraviglia il fatto che una modifica dell'ordine dei termini possa portare a un cambiamento della somma, o addirittura possa rendere la serie divergente, o indeterminata. Si ha, infatti, il seguente

Teorema 16.2 *Sia Σa_n una serie convergente, ma non assolutamente convergente. Comunque si scelga un numero $L \in \mathbf{R}$, esiste un riordinamento $\Sigma \alpha_n$ della serie data tale che*

$$\Sigma \alpha_n = L.$$

Dimostrazione. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ i termini positivi ($\geqslant 0$) e $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ quelli strettamente negativi, nell'ordine in cui compaiono nella serie Σa_n. Per quanto detto sopra, si dovrà avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = -\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty. \qquad [16.3]$$

Inoltre, essendo la serie data convergente, sarà

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0. \qquad [16.4]$$

Per definire il riordinamento $\Sigma\,\alpha_n$, poniamo innanzitutto $\alpha_1 = p_1$. Per α_2, procediamo così: se $\alpha_1 > L$, prenderemo $\alpha_2 = q_1$, mentre, se $\alpha_1 \leqslant L$, porremo $\alpha_2 = p_2$. In generale, supponiamo di aver già definito $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, e che questi consistano nei primi k termini positivi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ e nei primi $m-k$ termini negativi $q_1, q_2, \ldots, q_{m-k}$. Per definire α_{m+1}, calcoliamo la somma parziale $\sigma_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$. Se risulta $\sigma_m > L$, porremo $\alpha_{m+1} = q_{m-k+1}$ (cioè prenderemo come α_{m+1} il primo dei termini negativi disponibili), mentre se $\sigma_m \leqslant L$, si porrà $\alpha_{m+1} = p_{k+1}$.

Osserviamo, a questo punto, che a causa delle [16.3] le somme parziali σ_m non potranno essere né definitivamente maggiori, né definitivamente minori di L, e dunque tutti i termini p_i e q_i finiranno per essere contenuti nella serie $\Sigma\,\alpha_n$, che sarà così un riordinamento della $\Sigma\,a_n$. In secondo luogo, la differenza $\sigma_m - L$ sarà sempre compresa tra l'ultimo termine negativo e l'ultimo termine positivo presi in considerazione,[7] e quindi, per la [16.4], la successione $\{\sigma_m\}$ avrà come limite il numero assegnato L. ■

Si noti che, con lo stesso procedimento, si possono costruire, a partire da una serie $\Sigma\,a_n$ che sia convergente ma non assolutamente convergente, serie che divergono a $+\infty$ o a $-\infty$, e anche serie indeterminate. La semplice dimostrazione di queste asserzioni è lasciata per esercizio.

*17 Prodotti infiniti

Analogamente alla teoria delle serie si potrebbe sviluppare la teoria dei prodotti infiniti

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \tag{17.1}$$

definendo prima i prodotti parziali

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$$

e poi effettuando il limite della successione $\{p_n\}$. Se tale limite esiste finito, si dirà che il prodotto infinito è convergente, e si porrà

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} p_n.$$

E' chiaro che i termini a_i devono essere tutti positivi, o almeno positivi da un certo punto in poi, altrimenti troppi cambiamenti di segno impedirebbero alla successione $\{p_n\}$ di convergere, a meno che essa non tenda a zero (caso peraltro poco interessante, al punto che, in genere, *un prodotto infinito si dice convergente se il limite dei prodotti parziali è finito e non nullo*).

[7] A rigore, questa affermazione non è vera fin dall'inizio, ma comincia a valere non appena le somme σ_m superano per la prima volta il numero L.

Con la convenzione di considerare solo prodotti a termini positivi, la teoria dei prodotti infiniti si riduce facilmente a quella della serie. Basta infatti osservare che risulta

$$\ln p_n = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i,$$

e che, pertanto, il prodotto infinito

$$\Pi\, a_i$$

è convergente se e solo se è convergente la serie

$$\Sigma \ln a_i,$$

In questo modo, molti risultati relativi alle serie possono essere tradotti in analoghi risultati per i prodotti infiniti; ad esempio, se il prodotto [17.1] è convergente, allora la successione a_n tende a uno.

Esempio 17.1
Il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

è divergente. Infatti la serie dei logaritmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

è divergente, essendo maggiore della serie armonica. ■

Esempio 17.2
Il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

converge. Infatti risulta

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e,$$

e la successione a primo membro è crescente; ne segue che

$$1 + \frac{1}{n^2} < e^{1/n^2},$$

e dunque

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

e la serie a secondo membro è convergente. Al contrario, il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

diverge; infatti, per la disuguaglianza [2.1], si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2,$$

e dunque

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{\ln 2}{n}. \ \blacksquare$$

18 Successioni e serie complesse

Abbiamo già osservato che si possono estendere ai numeri complessi tutte quelle definizioni e quei teoremi che dipendono unicamente dalla struttura metrica dei numeri reali, e non dal loro ordinamento. In particolare, si possono considerare successioni a valori in $\mathbf{C}$, per le quali il concetto di limite è dato dalla definizione [3.1] e dalle sue equivalenti (A_1) e (A_2), non appena si interpreti, ad esempio, il simbolo $|\ \ |$ come il modulo in $\mathbf{C}$. Se $\{z_n\}$ è una successione in $\mathbf{C}$, diremo dunque che $\lim_{n\to\infty} z_n = L \in \mathbf{C}$ *se, per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un numero reale* ν *tale che, per ogni* $n > \nu$, *si abbia* $|z_n - L| < \epsilon$.

Se $\{z_n\}$ è una successione in $\mathbf{C}$, essa individuerà le due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, ossia, rispettivamente, la successione delle parti reali e delle parti immaginarie dei numeri complessi z_n. Viceversa, due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ determinano una successione complessa $\{a_n + i\,b_n\}$. E' facile vedere che *la successione complessa* $\{z_n\}$ *è convergente se e solo se sono convergenti separatamente le due successioni reali* $\{\mathrm{Re}\,(z_n)\}$ *e* $\{\mathrm{Im}\,(z_n)\}$, come segue immediatamente dalle disuguaglianze (vedi cap. 1, [8.10]):

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| \leqslant |z_n - L|$$
$$|\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L)| \leqslant |z_n - L|$$
$$|z_n - L| \leqslant |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(L)| + |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(L)|.$$

Analogamente, una successione $\{z_n\}$ è di Cauchy in $\mathbf{C}$ se e solo se lo sono (in $\mathbf{R}$) le successioni $\{\mathrm{Re}\,(z_n)\}$ e $\{\mathrm{Im}\,(z_n)\}$. Ne segue che $\mathbf{C}$ è *completo*, cioè che *ogni successione di Cauchy in* $\mathbf{C}$ *è convergente*.

Sia infatti $\{z_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathbf{C}$; anche le successioni reali $\{\mathrm{Re}\,(z_n)\}$ e $\{\mathrm{Im}\,(z_n)\}$ saranno di Cauchy, e dunque convergenti (teorema 12.1). Per quanto detto sopra, risulterà convergente anche la successione $\{z_n\}$.

Veniamo ora alle serie a termini complessi; è chiaro da quanto precede che la serie Σz_n sarà convergente se e solo se lo sono le serie $\Sigma \operatorname{Re}(z_n)$ e $\Sigma \operatorname{Im}(z_n)$; a queste si possono applicare, ovviamente, i risultati dei paragrafi 14 e 15. Alle serie complesse si può inoltre estendere il teorema 15.1 (dell'assoluta convergenza): *se la serie dei moduli* $\Sigma |z_n|$ *è convergente, sarà tale anche la serie* Σz_n, come segue direttamente dalle disuguaglianze [8.10] del capitolo 1 e dal teorema 15.1 applicato alle serie $\Sigma \operatorname{Re}(z_n)$ e $\Sigma \operatorname{Im}(z_n)$.

Vale anche l'analogo del teorema 12.2, e cioè: *se una serie* Σz_n *converge, allora si deve avere* $\lim z_n = 0$.

Esempio 18.1
La serie geometrica complessa

$$\Sigma \alpha^n, \qquad \alpha \in \mathbf{C},$$

è *convergente se* $|\alpha| < 1$, *non convergente se* $|\alpha| \geqslant 1$.

Infatti, se $|\alpha| < 1$, la serie $\Sigma |\alpha^n| = \Sigma |\alpha|^n$ è convergente; se invece $|\alpha| \geqslant 1$, la serie non può essere convergente perché $|\alpha^n| \geqslant 1$, e dunque non è verificata la condizione necessaria $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. ∎

Esempio 18.2
La serie esponenziale complessa

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è *convergente per ogni* $z \in \mathbf{C}$.

Infatti si ha $|z^n/n!| = |z|^n/n!$, e la serie reale $\Sigma |z|^n/n!$ è convergente per ogni valore di $|z|$ (vedi esercizio 15.3 (c)). ∎

Notizie storiche

La prima serie che appare nella storia della matematica è la serie geometrica, usata da Archimede nella quadratura della parabola, cioè nel calcolo dell'area del segmento di parabola. Non risulta che le serie fossero state usate precedentemente: ad esempio non si ha notizia dell'uso di esse nella discussione dei famosi paradossi di Zenone, alcuni dei quali, in particolare quello famoso di Achille e della tartaruga, si prestano a essere trattati per mezzo della serie geometrica.

La matematica classica non va al di là della serie geometrica, né grandi progressi si registrano nel Medioevo, se si eccettua una dimostrazione della divergenza della serie armonica, con un'argomentazione essenzialmente simile alla nostra (vedi esempio 12.1). Ancora agli inizi del diciassettesimo secolo la serie geometrica è praticamente la sola che venga usata con profitto, ad esempio da Fermat per trovare le aree di numerose figure.

Il grande sviluppo delle serie inizia nella seconda metà del Seicento, con la scoperta di Nicolaus Mercator (circa 1620-1687) che riesce, con uno sviluppo in serie, a eseguire la quadratura dell'iperbole, e dunque a calcolare i logaritmi (vedi cap. 5, § 8 e cap. 6, § 7).

Quasi contemporaneamente, Isaac Newton (1642-1727) trova un grandissimo numero di sviluppi in serie, tra cui, indipendentemente, quello di Mercator, con i quali viene fra l'altro a fornire una quadratura del cerchio, cioè a trovare una serie la cui somma sia l'area del cerchio:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{120} - \frac{5}{1152} - \dots,$$

obiettivo, peraltro, raggiunto anche da Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

che, per l'occasione, introduce il criterio che porta il suo nome (vedi teorema 15.2), e in un certo senso ancor prima da John Wallis (1616-1703) con il suo prodotto infinito:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots} = \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{63}{64}\cdots$$

E' comunque per opera di Newton che la teoria degli sviluppi in serie viene portata a perfezione, divenendo uno dei pilastri del calcolo infinitesimale newtoniano.

Allo sviluppo dei metodi basati sulle serie non corrisponde un altrettanto profondo studio delle questioni di convergenza, che anzi vengono esplicitamente tralasciate: ad esempio dalla formula, valida per $|x| < 1$, che dà la somma della serie geometrica (vedi esempio 2.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

si arriva talora perfino a concludere, ponendo $x = 2$,

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Se nelle mani di un grande matematico come Eulero estrapolazioni come la precedente possono portare a risultati di rilievo, grazie soprattutto alla sua profonda intuizione matematica che gli consente di evitare i trabocchetti che si nascondono dietro una manipolazione acritica delle formule, a lungo andare la situazione diventa poco sostenibile e si fa strada la convinzione che sia necessaria una revisione critica della teoria delle serie, come peraltro di tutto il calcolo infinitesimale.

Questa rifondazione è compiuta da Cauchy nel suo già citato *Cours d'Analyse*, nel quale viene definita e studiata la convergenza delle serie, limitando le operazioni e le manipolazioni alle serie convergenti, e vengono dimostrati quei criteri di convergenza che abbiamo descritto nei paragrafi 14 e 15 del presente capitolo.

Uno strumento di grande importanza e duttilità si rivela, a questo proposito, il criterio di convergenza di Cauchy (vedi teorema 12.1) che è enunciato dal matematico francese come evidente, e si trova prima ancora nell'opera di Bernhard Bolzano (1781-1848), il quale ne tenta anche una dimostrazione; questa, in mancanza di una teoria dei numeri reali, non poteva che rivelarsi illusoria.

La dimostrazione del principio di Cauchy diventa possibile non appena si sia fatta chiarezza sugli assiomi che individuano il sistema dei numeri reali, ovvero si sia dato di questi un modello sulla base dei numeri naturali.

Molto più moderna è la teoria delle successioni, se si eccettua una trattazione dovuta al matematico bolognese Pietro Mengoli (1625-1686) che nella sua *Geometria speciosa*, del 1659, ne definisce correttamente i limiti (e le operazioni con questi). Le idee di Mengoli restano ignorate, anche perché l'interesse per le successioni non si manifesta che molto più tardi, man mano che progredisce lo studio delle proprietà topologiche della retta reale (§ 11), e in generale degli spazi metrici, nei quali le successioni convergenti determinano le funzioni continue (cap. 3, teorema 4.1 e le successive osservazioni) e dunque, in analisi, la topologia.