7 Il teorema di ricorrenza

Definizione 32 *Sia A un insieme non vuoto. Una* **successione** *in A è una funzione $a : \mathbb{N} \to A$. Di solito una successione $a : \mathbb{N} \to A$ si denota con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o con $\{a_n\}$.*

Una importante conseguenza del principio di induzione è il seguente teorema che permette di definire una "successione di elementi in termini dell'elemento precedente".

Teorema 33 *Sia A un insieme non vuoto. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia data una funzione $f_n : A \mapsto A$ e sia $\alpha \in A$. Esiste una ed una sola successione $\{a_n\}$ in A tale che*

(i) $a_1 = \alpha$;

(ii) $a_{n+1} = f_n(a_n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Nella dimostrazione di tale risultato faremo uso di particolari successioni: se $n \in \mathbb{N}$, chiamiamo un "n–segmento" una successione $\{b_k\}$ che verifichi:

(iii) $b_1 = \alpha$;

(iv) $b_k = f_{k-1}(b_{k-1})$, $\forall\ 2 \le k \le n$.

In particolare, un 1–segmento è una successione $\{b_k\}$ che verifica solo (iii).

Le proprietà fondamentali degli n–segmenti sono raccolte nel seguente

Lemma 34 (a) *Per ogni n esiste un n–segmento.*
(b) *Un n–segmento è un k–segmento per ogni $1 \le k \le n$.*
(c) *Se $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono due n–segmenti, allora $b_k = c_k$, $\forall\ 1 \le k \le n$.*

Dimostrazione del Lemma 34.
(a) Per induzione. Per $n = 1$ definiamo $\{b_k\}$ con $b_k := \alpha$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Tale successione è ovviamente un 1–segmento. Sia ora $n \ge 1$, assumiamo che esista un n segmento $\{b_k\}$ e mostriamo che esiste anche un $(n+1)$–segmento; dal principio di induzione seguirà allora (a). Definiamo $\{c_k\}$ ponendo

$$c_k := \begin{cases} b_k & \text{se } k \le n \\ c_k := f_n(b_n) & \text{se } k \ge n+1 \end{cases}.$$

Allora, poiché $\{b_k\}$ è un n–segmento si ha che $c_1 := b_1 = \alpha$ e, per ogni $2 \le k \le n$, $c_k := b_k = f_{k-1}(b_{k-1}) = f_{k-1}(c_{k-1})$. Infine $c_{n+1} := f_n(b_n) = f_n(c_n)$ e dunque $\{c_k\}$ è un $(n+1)$–segmento.

(b) segue immediatamente dalla definizione di n–segmento.

(c) Dimostriamo l'affermazione per induzione su $n \ge 1$.

L'affermazione per $n = 1$ segue direttamente dalla definizione di 1–segmento.

Assumiamo, ora, l'asserto vero per $n \ge 1$ e siano $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ due $(n+1)$–segmenti. Per (b) $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$ sono anche due n–segmenti e quindi (per l'ipotesi induttiva) $b_n = c_n$, ma allora (essendo $(n+1)$–segmenti) $b_{n+1} = f(b_n) = f(c_n) = c_{n+1}$. ∎

Dimostrazione del Teorema 33.
Poniamo, per ogni n, $a_n := b_n$ dove $\{b_k\}$ è un qualunque n–segmento (che esiste, per ogni n, per (a) del Lemma 34): tale definizione è ben posta (ossia non dipende dal particolare n–segmento) grazie a (c) del Lemma 34. Poiché per ogni n–segmento $\{b_k\}$, $b_1 = \alpha$, si ha

che $a_1 = \alpha$. Per ogni $n \geq 2$, $a_n = b_n$ per un qualche n–segmento $\{b_k\}$; quindi $a_n = b_n = f_{n-1}(b_{n-1}) = f_{n-1}(a_{n-1})$ (per definizione di n–segmento, per definizione di a_k e per (c) del Lemma 34). Quindi la successione $\{a_k\}$ verifica (i) e (ii).

Resta da dimostrare l'unicità. Supponiamo che $\{\hat{a}_n\}$ sia un'altra successione che verifichi (i) e (ii). Dimostriamo, ancora per induzione, che $a_n = \hat{a}_n$ per ogni n. Da (i) segue che $a_1 = \alpha = \hat{a}_1$. Supponiamo ora che $a_n = \hat{a}_n$. Poiché entrambe le successioni verificano (ii), dall'ipotesi induttiva segue che $a_{n+1} = f_n(a_n) = f_n(\hat{a}_n) = \hat{a}_{n+1}$ e dal principio di induzione segue che $a_n = \hat{a}_n$ per ogni n. $\blacksquare$

Esempi con $A = \mathbb{R}$:

(i) Sia $\alpha = t \in \mathbb{R}$ e $f_n(x) = tx$ (per ogni n). Dal Teorema 33 segue che esiste una unica successione $\{a_n\}$ tale che $a_1 = t$ e $a_n = t \cdot a_{n-1}$. Tale successione si denota con t^n (o meglio è il *significato* del simbolo t^n). Si pone anche $t^0 := 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(ii) Sia $\alpha = 1$ e $f_n(x) = nx$. Dal Teorema 33 segue che esiste una unica successione $\{a_n\}$ tale che $a_1 = 1$ e $a_n = n \cdot a_{n-1}$. Tale successione si denota con $n!$ ("n fattoriale"). Si pone anche $0! := 1$.

(iii) Sia $\{a_n\}$ una successione e definiamo $f_n(x) := x + a_{n+1}$: la successione $\{\sigma_n\}$ con $\sigma_1 := a_1$ e $\sigma_n = f_{n-1}(\sigma_{n-1})$ per $n \geq 2$ si chiama *la successione delle ridotte della serie con temine n–mo a_n* e si denota con

$$\sigma_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$