Il resto nella formula di Taylor

Lemma. *Sia $n \geq 1$ e $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^n. Allora,*

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt \ . \qquad (\mathrm{A_n})$$

Inoltre, esiste $s \in (0,1)$ tale che

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(n)}(s)}{n!} \ . \qquad (\mathrm{B_n})$$

Dimostriamo il lemma per induzione. Se $n = 1$, $(\mathrm{A_1})$ segue dal teorema fondamentale del calcolo. Assumiamo $(\mathrm{A_n})$ con $n \geq 1$. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt &= \Big[-\frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n)} \Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt \ , \end{aligned}$$

e quindi $(\mathrm{A_{n+1}})$ segue da $(\mathrm{A_n})$.

Per dimostrare $(\mathrm{B_n})$, osserviamo che facendo il cambio di variabile $\tau = (1-t)^n$ si ha che

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)dt = \frac{1}{n!} \int_0^1 F^{(n)}\big(1 - \sqrt[n]{\tau}\big) \, d\tau$$

e la $(\mathrm{B_n})$ segue dal teorema della media integrale. ∎

Sia ora $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e siano x_0 e x due punti distinti di (a,b). Il **teorema di Peano** dice che *se $f \in C^n\big((a,b)\big)$ e se definiamo il"resto n-simo" come $R_n(x;x_0) := f(x) - T_n(x;x_0)$ dove $T_n(x;x_0)$ è il polinomio di Taylor di ordine n di centro x_0, allora $R_n(x;x_0) = o((x-x_0)^n)$.*

Supponiamo ora che $f \in C^{n+1}\big((a,b)\big)$ e definiamo $F(t) := f\big(x_0 + t(x - x_0)\big)$. Allora, risulta $F \in C^{n+1}\big([0,1]\big)$ e, per ogni $0 \leq k \leq n+1$ si ha

$$F^{(k)}(t) = f^{(k)}\big(x_0 + t(x-x_0)\big) \cdot (x-x_0)^k \ .$$

Osserviamo anche che, facendo il cambio di variabile $y = x_0 + t(x - x_0)$ otteniamo l'identità

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y) \ (x-y)^n dy \ .$$

Dunque dal lemma (con $(n+1)$ al posto di n) segue immediatamente che se $f \in C^{n+1}\big((a,b)\big)$ e x_0 e x sono due punti distinti di (a,b) si ha:

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x;x_0) \ , \qquad \text{con} \qquad R_n(x;x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(y) \ (x-y)^n dy \ , \qquad (\mathrm{T_n})$$

ed inoltre esiste un punto ξ tra x_0 e x tale che

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x;x_0) \ , \qquad \text{con} \qquad R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \ (x-x_0)^{n+1} \ . \qquad (\mathrm{L_n})$$

La $(\mathrm{T_n})$ è la **formula di Taylor a ordine n con resto integrale** mentre la $(\mathrm{L_n})$ è la **formula di Taylor a ordine n con resto di Lagrange**. In particolare, se $f \in C^{n+1}([a,b])$, risulta

$$|R_n(x;x_0)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \ |x-x_0|^{n+1} \ , \qquad \text{con} \qquad M := \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \ .$$