

Teorema 3.11 *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto, chiuso e limitato. Allora esistono $\min E$ e $\max E$.*

Dimostrazione Dimostriamo l'esistenza del massimo¹. Sia $M = \sup E$ e supponiamo, per assurdo, che $M \notin E$ ossia che $M \in E^c := \mathbb{R} \setminus E$. Poiché E è chiuso, E^c è aperto; quindi M è un punto interno cioè esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \subset E^c$; ma questo contraddice la caratterizzazione dell'estremo superiore data in (1.10) a p. 13 (con $\ell = M$ e $A = E$). Il Teorema è dimostrato.

¹Per il l'esistenza del minimo basta osservare che $\min E = \max(-E)$ dove $-E = \{x : -x \in E\}$ e che, sotto le ipotesi del teorema, anche $-E$ è non vuoto chiuso e limitato.