L'oscillatore armonico

1. Velocità e accelerazione. Consideriamo un punto materiale di massa $m > 0$ vincolato a muoversi su una retta e si denoti la sua posizione al tempo $t \in \mathbb{R}$ con $x(t) \in \mathbb{R}$. La *legge oraria* di tale punto è, dunque, la funzione $t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$.

La *velocità media* tra due istanti t_0 e t_1 è data dal rapporto tra spazio percorso e l'intervallo di tempo $t_1 - t_0$, cioè:

$$v_{t_0,t_1} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \ ; \tag{1}$$

e la *velocità istantanea* $v(t_0)$ (o semplicemente *velocità*) al tempo t_0 del punto x sarà il limite per t_1 che tende a t_0 di v_{t_0,t_1}; tale limite, se esiste (finito), si denota con $\dot{x}(t_0)$ o con $x'(t_0)$ e coincide con *la derivata nel punto* t_0 della funzione $x(t)$.

Analogamente, la variazione media della velocità $v(t)$ ossia *l'accelerazione media* tra gli istanti t_0 e t_1 è data da

$$a_{t_0,t_1} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} \ ; \tag{2}$$

e la *accelerazione istantanea* $a(t_0)$ (o semplicemente *accelerazione*) al tempo t_0 del punto x sarà il limite per t_1 che tende a t_0 di a_{t_0,t_1}; tale limite, se esiste (finito), si denota con $\ddot{x}(t_0)$ o con $x''(t_0)$ e coincide con la derivata della velocità $v(t)$ al tempo t_0 o anche con *la derivata seconda*[1] *nel punto* t_0 della funzione $x(t)$.

2. La legge della dinamica di Newton. Secondo i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* del 1687 di Sir Isaac Newton (Woolsthorpe–by–Colsterworth, 25 dicembre 1642 – Londra, 20 marzo 1721), il moto di un punto materiale di massa m è regolato dalla relazione

$$F = ma \tag{3}$$

dove F denota la forza che agisce al tempo t sul punto di massa m e $a = a(t)$ è la sua accelerazione.

3. L'oscillatore armonico. Un punto di massa $m > 0$ vincolato (senza attrito) su una retta e soggetto alla forza di una molla ideale che lo attrae verso l'origine $x = 0$ della retta subisce, secondo Hook[2], una forza pari a $-kx$ dove $k > 0$ è la *costante di elasticità della molla*, x la posizione del punto materiale e il segno meno è dovuto al fatto che la molle attrae verso l'origine. Dunque, secondo Newton e Hook, la legge del moto di tale punto è regolata dall'*equazione differenziale*

$$-kx = m\ddot{x} \qquad \text{ovvero} \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x \ \text{ con } \ \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \tag{4}$$

Ora, sappiamo che esistono due funzioni "indipendenti" che soddisfano $f''(t) = -f(t)$ e sono $\sin t$ e $\cos t$. D'altra parte sappiamo anche che la derivata di $f(\alpha t)$ è uguale a $\alpha f'(\alpha t)$. Quindi due soluzioni indipendenti dell'equazione dell'oscillatore armonico (4) sono date da $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e dunque, poiché la derivata è una operazione lineare, qualunque combinazione lineare

[1] Ossia la derivata della derivata.

[2] Robert Hooke (Freshwater, 18 luglio 1635 – Londra, 3 marzo 1703).

$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ (con a e $b \in \mathbb{R}$) è una soluzione di (4). Queste osservazioni sono sufficienti per risolvere il problema di trovare la soluzione del moto di un punto di massa m soggetto alla forza elestica di Hook, avendo assegnato la posizione e la velocità iniziale del punto[3]. Infatti, una soluzione del *problema di Cauchy* (o "ai valori iniziali") di trovare una funzione di classe C^2, $t \to x(t)$, che soddisfi l'equazione differenziale (4) con posizione iniziale x_0 e velocità iniziale v_0 assegnate, ossia una funzione $x(t)$ tale che:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad x(0) = x_0 \ , \qquad \dot{x}(0) = v_0 \tag{5}$$

è data, come è immediato verificare, da

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \ . \tag{6}$$

Verifichiamo ora che (6) è *l'unica soluzione di* (5).

Osserviamo che, in generale, se $x(t)$ è una soluzione di (4), moltiplicando per $\dot{x}$ i termini della equazione differenziale in (4) otteniamo (usando le regole di derivazione)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}\Big) = 0 \tag{7}$$

ossia $\dot{E}(t) = 0$ con[4]

$$E(t) := m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2} \ . \tag{8}$$

La funzione definita in (8) prende il nome di *energia della soluzione* $x(t)$. Ma una funzione di classe C^1 la cui derivata è identicamente nulla è costante: abbiamo dimostrato che *l'energia di una soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico è costante nel tempo* ed è quindi uguale al suo valore iniziale $E(0)$. Ora, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due soluzioni dello stesso problema di Cauchy (5), allora la funzione $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ è soluzione di:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad x(0) = 0 = \dot{x}(0)$$

ma allora, per tale soluzione, l'energia (costante nel tempo) soddisfa $E(t) = E(0) = 0$ ossia, in particolare $x(t) = 0$ per ogni t che significa $x_1(t) = x_2(t)$ per ogni t: il che mostra che la soluzione (6) è l'unica soluzione di (5).

Esercizio. Si dimostri che tutte le soluzioni di (5) sono date da $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ e determinare A e α in funzione di x_0 e v_0.

Spazio delle fasi. Una rappresentazione grafica interessante del moto di un oscillatore armonico si ottiene considerando la curva $\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ che tracciano, al variare del tempo t, le soluzioni (6). Poiché l'energia $E(t)$ di ogni soluzione è costante (ed uguale al suo valore iniziale $E(0)$), dall'equazione (8) segue immediatamente che $\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ descrive un'ellisse[5] di semiassi $(x_0^2 + (v_0/\omega)^2)$ e $(v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2)$ come è facile verificare (**esercizio**); tali ellissi saranno percorso dal punto $\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$, al crescere di t, in senso orario (**esercizio**).

[3] È evidente, dal punto di vista fisico, che a posizioni e velocità iniziali diverse seguiranno evoluzioni diverse; d'altra parte la accelerazione iniziale $\ddot{x}(0)$ non può essere assegnata arbitrariamente poiché essa deve soddisfare l'equazione (4) al tempo $t = 0$ (e analogamente, per le derivate di ordine superiore).

[4] Si noti che $E(t)$ coincide con la quantità tra parentesi in (7) moltiplicata per la costante m.

[5] Una ellisse in $\mathbb{R}^2$ è il luogo di punti (x, y) che soddisfano l'equazione algebrica $\Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1$; con dati $a, b > 0$ che prendono il nome di semi-assi dell'ellisse.