

Gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q}

Il sistema dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è definito da sedici assiomi¹. In queste note vengono definiti i numeri naturali (\mathbb{N}), interi (\mathbb{Z}) e razionali (\mathbb{Q}).

I numeri naturali

Definizione 1 (i) Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ viene detto **induttivo** se:

- $0 \in I$
- $x \in I \implies x + 1 \in I$.

(ii) L'**insieme dei numeri naturali** \mathbb{N} è il più piccolo insieme induttivo di \mathbb{R} , cioè²

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : \forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ induttivo}, x \in I\} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I.$$

Osservazione 2 (i) Esempi di insiemi induttivi sono $I_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $I_2 := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. Dunque dalla definizione di \mathbb{N} segue che $\mathbb{N} \subseteq I_1$ e $\mathbb{N} \subseteq I_2$. In particolare, $n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non ci sono interi tra 0 e 1: se $x \in \mathbb{R}$ è tale che $0 < x < 1$ allora $x \notin \mathbb{N}$.

(ii) Dalla definizione di \mathbb{N} e dagli assiomi algebrici di \mathbb{R} segue immediatamente che \mathbb{N} soddisfa le seguenti proprietà³:

- (P₁) $0 \in \mathbb{N}$;
- (P₂) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$;
- (P₃) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \neq 0$;
- (P₄) $n, m \in \mathbb{N}$ e $n + 1 = m + 1 \implies n = m$;
- (P₅) $I \subseteq \mathbb{N}$, I induttivo $\implies I = \mathbb{N}$.

Proposizione 3 (“**Principio di induzione**”) Siano $\mathcal{P}(n)$ affermazioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathcal{P}(0)$ sia vera e che dalla verità di $\mathcal{P}(n)$, con $n \geq 0$, segua che $\mathcal{P}(n + 1)$ è vera. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione Sia $I := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \text{ è vera}\}$. Dalle ipotesi segue che $I \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo e quindi, per (P₅), $I = \mathbb{N}$. ■

Osservazione 4 (i) Si osservi che il “primo valore” non deve necessariamente essere 0 ma può essere un qualunque numero intero $n_0 \in \mathbb{Z}$; vale, infatti, la seguente generalizzazione del principio di induzione: Se $\mathcal{P}(n_0)$ è vera e da “ $\mathcal{P}(n)$ vera per $n \geq n_0$ ” segue $\mathcal{P}(n + 1)$, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Basta porre $\mathcal{P}'(n) := \mathcal{P}(n_0 + n)$ ed applicare la Proposizione 3 a $\mathcal{P}'(n)$.

Un'altra formulazione equivalente che si usa spesso è:

Se $\mathcal{P}(0)$ è vera e da “ $\mathcal{P}(k)$ vera per $0 \leq k \leq n$ ” segue $\mathcal{P}(n + 1)$, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Basta infatti porre $\mathcal{P}'(n) := \{\mathcal{P}(k) : 0 \leq k \leq n\}$ ed applicare la Proposizione 3 a $\mathcal{P}'(n)$.

Definizione 5 L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} è l'insieme $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$.

Definizione 6 L'insieme dei numeri razionali è definito come⁴

$$\mathbb{Q} := \{r = p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}.$$

¹Vedi, ad esempio, http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/ING_14_15/1>0.pdf.

²Si osservi che l'intersezione di insiemi induttivi è un insieme induttivo.

³(P₁) ÷ (P₅) sono note come “assiomi di Peano”. Si noti che dal nostro punto di vista essi sono proposizioni matematiche che derivano dagli assiomi algebrici di \mathbb{R} e non sono assiomi.

⁴Le notazioni in “forma di frazione” p/q e $\frac{p}{q}$, per definizione, significano pq^{-1} .