

RICHIAMI DI INSIEMISTICA

1/10/2014

proprietà fondamentali:

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ 
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ 
- $A \subseteq X$ (il complementare di A in X) $\stackrel{A^c}{=} \{x \in X \text{ tale che } x \notin A\}$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $x \in (A \cup B)^c; x \in A^c; x \in B^c \rightarrow x \in A^c \cap B^c$
- ~~$\forall D \subseteq X \rightarrow X = D \cup D^c$~~
- $\emptyset$ insieme vuoto $\rightarrow \emptyset \subseteq A \quad (\forall A) \rightarrow \emptyset^c = A \rightarrow A^c = \emptyset$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 $x \in (A \cap B)^c \rightarrow x \in A^c \text{ o } x \in B^c$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

PRODOTTO CARTESIANO

$$(A; B) \quad A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

FUNZIONE: $f: A \rightarrow B \quad \forall x \in A \exists ! y \in B \rightarrow y = f(x)$ (! = *un solo*)

$G_f = A \times B$ e una funzione se $(x; y) \in G_f \text{ e } (x; z) \in G_f \rightarrow y = z$

esempio 1.1

consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N} \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

$$A = \{5; 8; 9; 12; 16\} \quad P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$$

$$B = \{5; 8; 24\} \quad D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = \{5; 8; 9; 12; 16; 24\}$$

$$A \cap B = \{5; 8\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A; x \notin B\} = A \cap B^c = \{9; 12; 16\}$$

$$A \cap P = \{8; 12; 16\}$$

$$A \cap D = \{5; 9\}$$

$$A \setminus P = \{5; 9\}$$

$$D^c = P$$

$$P \cap D = \emptyset$$

$$P \cup D = \mathbb{N}$$

esempio 1.2

$$A = \{3; 4; 7; 10\}; B = \{0; 1\}$$

$$A \times B = \{(3; 0); (4; 0); (7; 0); (10; 0); (3; 1); (4; 1); (7; 1); (10; 1)\}$$

$$B \times A =$$

$$B \times B = \{(0; 0); (2; 1); (0; 1); (1; 0)\}$$

(cardinalità = numero elementi di un insieme)

INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \quad \mathbb{Z} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\} \text{ [INTERI]}$$

~~oss.~~ (oss. $\mathbb{N}$ ha un primo elemento minore di tutti gli altri)

TEOREMA: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità (#)

$\#A \leq \#B \Leftrightarrow \exists$ una funzione iniettiva da A in B
 $(f: A \rightarrow B \mid \forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

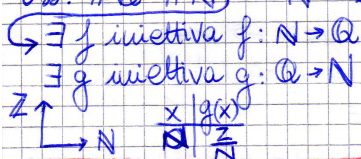
DIMOSTRAZIONE: $\# \mathbb{N} \leq \# \mathbb{Z}$ infatti $f(x) = x$

$$\# \mathbb{Z} \leq \# \mathbb{N} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \in \mathbb{N} \\ 2|x| - 1 & \forall x \in \mathbb{Z} < 0 \end{cases}$$

x	f(x)
-1	1
-2	3
-3	5
1	2
2	4
3	6

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \text{ con } q \in \mathbb{N}; q \neq 0; p \in \mathbb{Z} \right\} \text{ [RAZIONALI]}$$

oss. $\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (presi due razionali $r < s$)
 $\exists$ f iniettiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ($\exists$ infinite $x \in \mathbb{Q}$ $r < x < s$)
 $\exists$ g iniettiva $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$



TEOREMA DI ARISTOTELE: $\nexists r \in \mathbb{Q} \mid r^2 = 2$

supponiamo per assurdo che esista un numero $r \in \mathbb{Q}: r = \frac{p}{q}$ con $p > 0; q > 0$ e primi tra loro (non hanno fattori comuni)

se $r^2 = 2$, allora $\frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2$ (~~quindi p è pari~~) $\Rightarrow p$ è pari?
 quindi $p = 2k$ con $k \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{(2k)^2}{q^2} = 2 \rightarrow \frac{4k^2}{q^2} = 2 \rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q$ è pari

C'è una contraddizione in quanto si era supposto che p e q fossero coprimi.

$$\mathbb{R} = \{$$

I 16 COMANDAMENTI DI $\mathbb{R}$ (DEFINIZIONE ASSIOMATICA)

① $\mathbb{R}$ è un insieme $\neq \emptyset$, dotato di due operazioni $(+; \cdot)$ e una relazione d'ordine $(\leq)$

• SOMMA 1. $x+y = y+x$ (commutativa) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(S1-S4) 2. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associativa)

3. $\exists 0 \in \mathbb{R} \mid x+0 = x$ (elemento neutro)

4. $\forall x \exists y \mid x+y = 0$ (y = opposto)

• MOLTIPlicAZIONE 5. $x \cdot y = y \cdot x$

(P2-P4) 6. $(xy)z = x(yz)$

7. $\exists 1 \in \mathbb{R} \mid x \cdot 1 = x$ (elemento neutro)

8. $\forall x \neq 0 \exists y \mid xy = 1$ (reciproco)

• ORDINE 9. proprietà riflessiva $x \leq x$

(O1-O4) 10. " transitiva $x \leq y; y \leq z \Rightarrow x \leq z$

11. " antisimmetrica se $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

(SP1) 12. $\forall x, y \Rightarrow x \leq y$ o $y \leq x$ (non sempre definire il minore)

13. proprietà distributiva $x(y+z) = xy + xz$

14. (S5) se $x \leq y \Rightarrow (x+n) \leq (y+n) \quad \forall n \in \mathbb{R}$

15. (PO) $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz \quad \forall z > 0$

IL SEDICESIMO assioma dell'estremo superiore

$A \subseteq \mathbb{R}; A \neq \emptyset$ es. $\mathbb{N}; \{x: 0 < x < 1\}; \{x > 0 \mid x^2 < 2\}$

$M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE per A se $\forall x \in A \quad x \leq M$

$m \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se $\forall x \in A \quad x \geq m$

es. trovare un maggiorante e un minorante per $A: \{x \mid 0 < x < 1\}$

$M=1; m=0$

oss. se esiste un magg. di A ne esistono infiniti

• un insieme A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se ammette un magg.

• un insieme A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se ammette un minorante

• se $A \neq \emptyset$, $M \in A$ ed è un magg., M è il massimo di A ($M = \max A$)

• se esiste un massimo o un minimo in un insieme, tale massimo è unico.

→ DIM: supponiamo che M_1 e M_2 siano due massimi di A

$M_1, M_2 \in A, M_i \geq x \quad \forall x \in A, i=1,2$

$M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$ quindi $M_1 = M_2$ per (O2)

16. se $s \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}$ se s è il minimo dei maggioranti, (è l'estremo inferiore se è il max dei minoranti)

~~oss~~ se $A \neq \emptyset$ è limitato superiormente allora ha estremo superiore

6/10/14

TEOREMA: $1 > 0$

① unicità dell'opposto: se $x+y=0$ e $x+z=0 \Rightarrow y=z$

$$\text{DIM: } y \stackrel{(S_3)}{=} y+0 = y + (x+z) \stackrel{(S_2)}{=} (x+y) + z \stackrel{\text{ipotesi}}{=} 0+z = z$$

(l'opposto di x si denota con $-x$)

② unicità del reciproco: se $x \neq 0$ e $xy=1$ e $xz=1 \Rightarrow y=z$

$$\text{DIM: } y \stackrel{(P_3)}{=} (1)y = (xz)y \stackrel{\text{per ipotesi}}{=} (xy)z \stackrel{(P_2)}{=} (1)z = z$$

③ se $x+y=x \Rightarrow y=0$ (cancellazione)

$$y \stackrel{(S_3)}{=} y+0 \stackrel{(S_4)}{=} y+(x-x) \stackrel{(S_2)}{=} (y+x)-x \stackrel{(S_1)}{=} (x+y)-x \stackrel{\text{ipotesi}}{=} x-x \stackrel{(S_4)}{=} 0$$

④ se $xy=x$ con $x \neq 0 \Rightarrow y=1$

DIM:

⑤ $x \cdot 0 = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{DIM: } x \cdot 0 \stackrel{(S_3)}{=} x \cdot (0+0) \stackrel{(S_2)}{=} (x \cdot 0) + (x \cdot 0) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x \cdot 0 = 0$$

⑥ $(-1) \cdot x = -x$

$$\text{DIM: } x + (-1)x \stackrel{(P_3)}{=} (1 \cdot x) + (-1)x \stackrel{(P_2)}{=} x \cdot 1 + x \cdot (-1) \stackrel{(S_2)}{=} x(1-1) = x \cdot 0 \stackrel{(S_3)}{=} 0$$

$$x + (-1)x = 0 \Rightarrow x - x = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} (-1)x = -x$$

⑦ $-(-x) = x$

$$\text{DIM: } (-x) + x \stackrel{(S_1)}{=} x + (-x) \stackrel{(S_4)}{=} 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = -(-x)$$

⑧ $(x^{-1})^{-1} = x$ con $x \neq 0$

DIM:

⑨ $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$

$$\text{DIM: } x \geq 0 \stackrel{(S_0)}{\Rightarrow} x - x \geq -x \Rightarrow 0 \geq -x$$

⑩ $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{DIM: se } x \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \text{ per (P0) con } x=y$$

$$\text{se } x < 0 \quad x \cdot x \stackrel{(7)}{=} x \cdot (-(-x)) \stackrel{(6)}{=} x \cdot ((-1)(-x)) \stackrel{(P_{22})}{=} (-1 \cdot x)(-x) \stackrel{(9)(P_0)}{=} (-x)(-x) \stackrel{(6)}{=} (-x)(-x) \stackrel{(9)(P_0)}{=} (-x)(-x) \geq 0$$

⑪ $1 > 0$

DIM: sappiamo per (P3) che $1 \neq 0$

$$1 = 1^2 \geq 0$$

$$0.\bar{9} = 0.9999... = 1$$

$$\text{Dim. } 0.\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^N}$$

$$= 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1$$

NOTAZIONI

• l'opposto di x si denota con $-x$

$$y + (-x) =: y - x$$

• il reciproco di $x \neq 0$ si denota con x^{-1} ; $1/x$

$$y \cdot x^{-1} =: \frac{y}{x} =: y/x$$

• $x < y$ significa $x \leq y$ e $x \neq y$

• $x \geq y$ significa $y \leq x$

$$x + y \cdot z = x + (y \cdot z)$$

$$x^2 := x \cdot x$$

$$2 := 1 + 1$$

7/10/14

$\sqrt{3} = x$ è l'unico numero reale positivo tale che $x^2 = 3$ (def)

$$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2 \quad 1 = \text{prima cifra}$$

$$1,7^2 = 2,89 < 3 < 3,28 = 1,8^2 \rightarrow \sqrt{3} = 1,7...$$

DEF. $\sqrt{2} = \sup \{x > 0 \mid x^2 < 2\}$ (sup = estremo superiore)

DIM. $1 \in A$ perché $1^2 = 1 < 2$ quindi $A \neq \emptyset$

2 è una maggiorante di A ($x \leq 2 \forall x \in A$)

↳ supponiamo per assurdo che $x > 0$, $x^2 < 2$ e $x > 2$

ma se $x > 2 \Rightarrow x^2 > 2^2 \Rightarrow x^2 > 4$ il che contraddice la tesi.

es. dimostrare che se $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

→ (guarda 9/10/14)

PROPOSIZIONE: $s = \sup A$ = estremo superiore se e solo se ($\Leftrightarrow$)

s è una maggiorante di A e $\forall x < s, \exists y \in A \mid x < y$

NEGAZIONE
($\exists x < s, \forall y \in A, x \geq y$)

DIMOSTRIAMO CHE: $\sup \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\} = 1$

→ supponiamo che ~~esista~~ $a \in \mathbb{R}$; $a < 1$: $a \geq x$ ~~per~~ $x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1$

8/10/14

Lemma (Disuguaglianza di Bernoulli) $\parallel$
 $(1+h)^n \geq 1+nh, \forall h > -1, \forall n \in \mathbb{N}$

identifichiamo i numeri naturali $\mathbb{N}$ dentro $\mathbb{R}$.

Def. $I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$ è un insieme induttivo e (i) $0 \in I$, (ii) $x \in I \Rightarrow x+1 \in I$
 esempi di insiemi induttivi: $\mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, I = \{0\} \cup [1; \infty[$.

$\Rightarrow \mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} := \{x \mid x \in I, \forall I \text{ induttivo}\} \quad [\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}]$

PRINCIPIO DI INDUZIONE: Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ e sia P_n una proposizione che dipende da $n \in \mathbb{Z}$ per $n \geq n_0$. se si ha (i) P_{n_0} è vera

(ii) $P_n \Rightarrow P_{n+1}, n \geq n_0$
 allora P_n è vera $\forall n \geq n_0$

DIMOSTRAZIONE

Sia $I := \{n \in \mathbb{N} \mid P_{n_0+n} \text{ è vera}\}$

$0 \in I$ perché P_{n_0} è vera, per (ii) se P_{n_0+n} è vera ($n \in I$), è vera anche P_{n_0+n+1} ($n+1 \in I$) $\Rightarrow$ (per def. di $\mathbb{N}$) $\mathbb{N} \subseteq I$ ossia P_n è vera $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \mathbb{N} = I$

DIM. BERNOULLI: applichiamo il P.I. con $n_0 = 0$. P_0 è vera.

Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che P_n è vera, ossia che $(1+h)^n \geq 1+nh$
 $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$, [c.e. $1+h > 0 \Rightarrow h > -1$]

$= 1+nh+h+nh^2 = 1+(n+1)h+nh^2$
 $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h \rightarrow P_{n+1}$ è vera quindi per (ii) anche P_n lo è.

VALORE ASSOLUTO (MODULO)

Def. $x \in \mathbb{R}, |x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

es. $|x+2| \leq |2x-3| + 1$

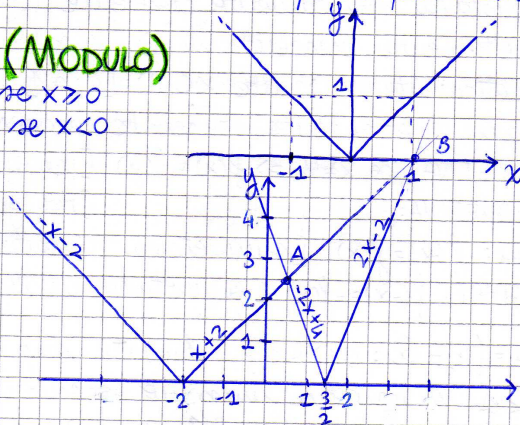
$y_1 = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$

$y_2 = \begin{cases} 2x-3+1 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3+1 & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$

$y = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -2x+4 & \text{se } x < -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} x+2 = -2x+4 \\ 3x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad y = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \quad A(\frac{2}{3}; \frac{8}{3})$

$y = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ 2x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 2x-2 \\ x = 4 \end{cases} \quad y = 4+2 = 6 \quad B(4; 6)$

SOL: $]-\infty; \frac{2}{3}] \cup [4; +\infty[$



PROPOSIZIONE:

[MODULO]

9/10/14

- (i) $|x| \leq C, C \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-C; C] \rightarrow \text{DIM (i)} \text{ se } x \geq 0 \quad |x| = x \Rightarrow x \leq C$
 $\text{se } x < 0, -x \leq C \Leftrightarrow x \geq -C$
 (ii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (O DI CAUCHY): $|x| + |y| \geq |x+y|$ *ovvia* $-C \leq x \leq C \Leftrightarrow x \in [-C; C]$
 DIM. (ii): per (i) $-|x| \leq x \leq |x|, -|y| \leq y \leq |y|$
 $-|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y|$
 $= -(|x| + |y|)$ quindi $|x+y| \leq |x| + |y|$
 (iii) $|x-y| \geq ||x| - |y|| \rightarrow \text{DIM (iii)}: \text{la relazione \textit{e} simmetrica in } x \text{ e } y$
~~che se $|x| > |y|$ allora $|x-y| \geq |x| - |y|$~~ *quindi possiamo assumere che $|x| > |y|$.*
 $\rightarrow (iii) \Leftrightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \Leftrightarrow |x| \leq |y| + |x-y|$
 $|x| = |(x-y) + y| \leq (\text{per ii}) |x-y| + |y|$

esercizio

- dimostrare che se $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ (i)
 e che se $a, b \geq 0, a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$ (ii)
 (i) se $a > b \Rightarrow a - b > 0, K := a - b \rightarrow a = b + K \rightarrow a^2 = (b + K)^2$
 $\rightarrow a^2 = b^2 + K^2 + 2bK > b^2$
 (ii) innanzitutto $a \neq b$ (altrimenti se $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$)
 per assurdo $a^2 > b^2, a \leq b \xrightarrow{(i)} a^2 \leq b^2 \rightarrow \text{contraddizione!!!}$

FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE: se $x \geq y, x, y \in \text{Dom } f \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$f(x) = x$ monotona strettamente crescente (crescente e iniettiva)

$f(x) = -x$ strettamente crescente in $D: [0; \infty[$

$f(x) = x^2$ strettamente crescente se $D: [0; \infty[$

$f(x) = 1$ non strettamente crescente/decrescente.

• FUNZIONE INIETTIVA: se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ [per ogni y al massimo 1 x]

• FUNZIONE SURIETTIVA: [per ogni y almeno una x]

• FUNZIONE PARI: $f(x) = f(-x)$ [simmetrica rispetto all'asse y]

• FUNZIONE DISPARI: $f(-x) = -f(x)$ [simmetrica all'origine]

esercizio: $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ trovare $\sup A$

$s < 1 \rightarrow \frac{s+1}{2} < 1$ A non ha massimo (ci sono infiniti num. tra 0 e 1)

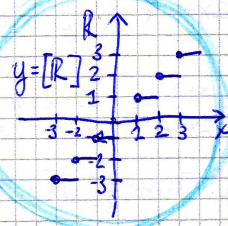
anche $\frac{s+1}{2} > s > 1$ è sbagliato ($s > \frac{s+1}{2} > 1 \geq x \forall x \in A$)

$0 < s < 1 \quad 1-s = \alpha > 0$ ~~$1 > \alpha > 0$~~

$y \in \mathbb{Q}, 0 < y < 1 \rightarrow 1-\alpha < 1-y < 1 \rightarrow \alpha > y > 0$

[NON HO
CAPITO...]

PARTE INTERA: $[x] = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$



Esercizi

$$\cos x = \frac{1}{2}, \cot x < 0$$

$$\sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} =$$

$$= -\sqrt{3/4} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



x = lunghezza dell'arco orientato di circonferenza di raggio uno che parte dal punto $(0,1)$ in senso antiorario

$$\rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

- 1.17a: usare il principio di induzione per dimostrare che:

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} *$$

SOMMATORIA

DEF: Dati $\{a_k, k \in \mathbb{Z}, k \geq n_0\}$

$$m \geq n_0 \quad \sum_{k=n_0}^m a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_m$$

alternativamente chiamare $\sigma_m = \sum_{k=n_0}^m a_k$, $\sigma_{n_0} = a_{n_0}$

$$\sum_{k=-1}^2 j^2 + k = j^2 + (-1) + j^2 + 0 + j^2 + 1 + j^2 + 2 = 4j^2 + 2$$

- * usiamo il P.I. con $n_0 = 1$, $n = 1 \quad \sum_{k=1}^1 k = 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

es 1.3

$\left\{ \frac{1}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} = A \rightarrow$ determinare se è limitato e se $\exists$ max, min, sup, inf.

$a_n = \frac{1}{n+3}$ è una successione (a valori in $\mathbb{R}$), ma $\Rightarrow$ una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio in $\mathbb{R}$.

$$A = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots \right\} \quad \frac{1}{3} = \max A = \sup A$$

$\frac{1}{n+3} \geq 0 \rightarrow 0$ è un minorante e $0 \notin A$, è l'inferiore?

Per Arrowood supponiamo che $\exists \varepsilon > 0$ minorante per A

cerchiamo $x \in A : x < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon$ non è minorante

$$\frac{1}{n+3} < \varepsilon \Rightarrow n+3 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 3 \Rightarrow \exists n = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 3$$

COEFFICIENTI BINOMIALI

13/10/14

DEF. Dati $n \geq k \geq 0$, $n, k \in \mathbb{N}$ il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad [0! := 1; 1! := 1; n! = n(n-1)!] \quad (\text{"n sopra k"})$$

TEOREMA DI NEWTON

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \quad (\text{è simmetrica in } a \text{ e } b)$$

Es. scrivere la formula per $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^k b^{4-k} = \cancel{b^4} + \cancel{4ab^3} + \cancel{6a^2b^2} + \cancel{4a^3b} + \cancel{a^4}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6 \quad \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{4} = \binom{4}{0} = 1$$

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^k b^{5-k} = b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 10 = \binom{5}{3}$$

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$$

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = a+b$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = b^2 + 2ab + a^2$$

$a > 0, x > 0 \ (a, x \in \mathbb{R})$ vogliamo definire (a^x)
 $0^x = 0, \text{ se } x \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a^x = a & \text{se } x=1 \\ a^x = a \cdot a^{x-1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
 $1^x = 1$

14/10/14

sia $x = \frac{1}{n}$ con $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} =: \mathbb{N}_+$ (radici)

consideriamo l'insieme $A = \{y > 0 \mid y^n \leq a\}$ non vuoto e limitato superiormente $\Rightarrow$ per il VII assioma $\exists s = \sup A$, $\boxed{a^{\frac{1}{n}} := \sup A = s}$
 (di fatto $A = [0; a^{\frac{1}{n}}[$)

DIMOSTRARE CHE $A \neq \emptyset$ e limitato superiormente

$0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$, supponiamo che $a \leq 1 \Rightarrow 1$ è un maggiorante

se $y^n < a \leq 1 \Rightarrow y < 1$ perché se fosse $y > 1 \Rightarrow y^n > 1 \ (y > 0)$

• se $a > 1$, a è un maggiorante, $y^n < a \leq a^n \Rightarrow y < a$

OSS. $a^{\frac{1}{n}}$ è l'unico $y > 0$ t.c. $y^n = a$

$[n \in \mathbb{N}_+]$

DEFINIAMO a^x con $x \in \mathbb{Q}_+$, $x = \frac{m}{n}$ con m, n interi, positivi e co-primi

$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \rightarrow$ per dimostrare bisogna usare il teorema per il quale $(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}, a, b > 0, n \in \mathbb{N}_+$

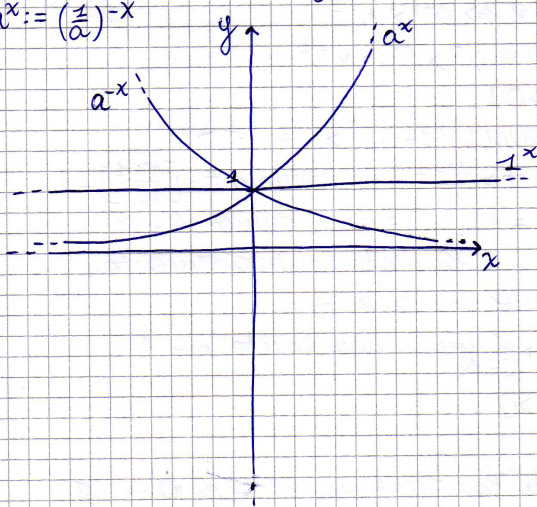
DIM TEOREMA: $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}) \cdot \dots \cdot (a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})}_{n \text{ volte}} =$
 $= (a^{\frac{1}{n}} \dots a^{\frac{1}{n}}) (b^{\frac{1}{n}} \dots b^{\frac{1}{n}}) \stackrel{\text{prop.}}{=} a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$

DEFINIAMO a^x con $x > 0$, ① $a > 1$, consideriamo l'insieme $A = \{y = a^r \text{ con } r \in \mathbb{Q}_+ \text{ e } r \leq x\}$

$a^x = \sup A$.

② ~~0 < a < 1~~ $0 < a < 1 \quad [a^x := \frac{1}{a^{-x}} \text{ se } x < 0, a > 1]$

$a^x := (\frac{1}{a})^{-x}$



PROPRIETÀ DELLE POTENZE $a, b > 0 \quad y, x \in \mathbb{R}$

- ① $a^{x+y} = a^x a^y$
- ② $(ab)^x = a^x b^x$
- ③ $(a^x)^y = a^{xy}$
- ④ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- ⑤ $a^x > 0$
- ⑥ $a^x > 1$ se $a > 1, x > 0$ & $a < 1, x < 0$
- ⑦ $a^x < 1$ se $a > 1, x < 0$ & $a < 1, x > 0$
- ⑧ $a^x < a^y, x < y, a > 1$
- ⑨ $a^x > a^y, x > y, a < 1$

Logaritmi

15/10/14

DEF. dato $a > 0, a \neq 1$, $\log_a x = y := a^y = x, a^{\log_a x} = x$

$f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$ $g(f(x)) = \log_a a^x = x$
 per definire $\log_a$ è necessario che l'immagine di g img $\subseteq$ dom f
 e $f \circ g = \text{identica}$ ($\text{id}(x) = x$) $\Rightarrow g = f^{-1}$ sono inverse tra loro.

$\rightarrow a > 1, x \mapsto \log_a x$ è per definizione la funzione inversa di $y \mapsto a^y$
 $\text{DOM}(a^y) = \mathbb{R}$ $\text{IM}(a^y) = \mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$
 $\text{DOM}(\log_a x) = \mathbb{R}^+ \quad \text{IM}(\log_a x) = \mathbb{R}$

f e g sono strettamente crescenti ($x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$)
 $\Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow$ è invertibile.

QUINDI $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$, e tale numero y è unico

(se $0 < a < 1$, $y \mapsto a^y$ è strettamente decrescente, quindi anche $\log_a x$)

es. dare la definizione di $\log_a x$ usando l'estremo superiore

Dato $x > 0$ vogliamo trovare una $y: a^y = x = \sup \{s \in \mathbb{R} \mid a^s < x\} = A$

verifichiamo che $A \neq \emptyset$, se $x \geq 1, 0 \in A \rightarrow A \neq \emptyset$

se $x \leq 1$ trovare una $s: a^s < x \Leftrightarrow a^{-s} > x^{-1}$

Chiamiamo $t = -s$ e voglio che $a^t > M := x^{-1}$

$a > 1 \quad a = 1+h \quad h > 0 \quad (h = a-1 > 0)$

$t: (1+h)^t > M \rightarrow$ per BERNOULLI $(1+h)^t \geq 1+ht > M$

la disuguaglianza è vera se $t > \frac{M-1}{h}$, ad esempio $t = \left\lceil \frac{M-1}{h} \right\rceil + 1$

es. $a=2, h=1, t = \lceil 10^{10}-1 \rceil + 1 = 10^{10} \quad s = -10^{10}$ quindi $A \neq \emptyset$

resta da dimostrare che A sia limitato superiormente.

se $a \leq x, a^s < x$, supponiamo che $a^s > c \cdot s$

$x > (1+h)^s \geq 1+hs \Rightarrow s < \frac{x-1}{h} \rightarrow$ è un maggiorante per A
 $(s \in \mathbb{N})$

~ IN SINTESI - LE 3 DEFINIZIONI
 di $\log_a x$ con $a \neq 1, a > 0, x > 0$

① l'unico $y \in \mathbb{R}: a^y = x$

② la funzione $x \mapsto \log_a x$ è la funzione inversa di $y \mapsto a^y$

③ $\log_a x = \sup \{s \in \mathbb{R} \mid a^s \leq x\}$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

16/10/14

① $a^{\log_a x} = x$

② $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

③ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

④ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

⑤ $\log_a x^k = k \log_a x$

⑥ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$

⑦ $\log_a x = \log_b b \log_b x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

⑧ $x > y > 0$ $\log_a x > \log_a y$ se $a > 1$
 $\log_a y > \log_a x$ se $a < 1$

⑨ $\log_a 1 = 0$

DIMOSTRAZIONE ②

$a^{(\log_a x + \log_a y)} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \stackrel{④}{=} x \cdot y = a^{\log_a (y \cdot x)} \Rightarrow ②$

DIMOSTRAZIONE ③

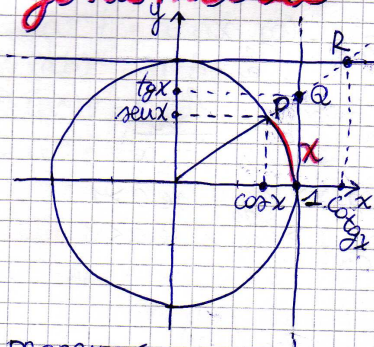
$0 = \log_a \left(\frac{1}{x} \cdot x \right) \stackrel{②}{=} \log_a \frac{1}{x} + \log_a x \Rightarrow \log_a x = -\log_a \frac{1}{x} \Rightarrow ③$

$\stackrel{DIM. ④}{a^{(\log_a x - \log_a y)}} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$

$\stackrel{DIM. ⑤}{a^{k \log_a x}} = (a^{\log_a x})^k \stackrel{④}{=} x^k \stackrel{④}{=} a^{\log_a x^k}$

$\sim \log_a x^2 = 2 \log_a |x| \quad (\sqrt{x^2} = |x|) \quad \text{es. } \log_a (-7)^2 = 2 \log_a 7$

Goniometria



~ x è la lunghezza orientata dell'arco che va da $(1;0)$ al punto P in senso antiorario.

~ P ha coordinate $(\cos x; \sin x)$

~ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$ se $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

~ Q ha coordinate $(1; \tan x)$

R ha coordinate $(\cotg x; 1)$

[OSS: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \tan x$]

PROPRIETÀ

① $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

② $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

③ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

④ se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $\exists T > 0 \Rightarrow f(x + T) = f(x) \quad \forall x$

e tale T è il più piccolo numero > 0 con questa proprietà, diremo che f è PERIODICA di PERIODO T .

⑤ $\tan(x + k\pi) = \tan x$

⑥ $\cotg x = \cotg(x + k\pi)$

⑦ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

⑧ $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

⑨ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

⑩ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑪ $|\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1$

⑫ ~~$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$~~

$\sin 2x = \rightarrow$

⑬ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \sin(\frac{\pi}{2} - (x+y)) = \\ = \sin(\frac{\pi}{2} - x - y) = \\ = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(-y) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) \sin(-y) \\ = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{cases}$$