

1.9 c)  $\log_2(1-\sqrt{x-2}) < 3$

$\log_2(1-\sqrt{x-2}) < \log_2 8$

$1-\sqrt{x-2} < 8$

$\sqrt{x-2} > -7 \rightarrow \forall x \in \mathbb{D}$

C.E.  $1-\sqrt{x-2} > 0$   
 $1 > \sqrt{x-2} \quad [x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2]$   
 $1 > x-2 \rightarrow x < 3 \quad \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2 \leq x < 3$

1.9 b)  $3^{x-2} < 2 = 3^{\log_3 2}$

$x-2 < \log_3 2$

perché  $3^x$  è una funzione strettamente crescente

$x < \log_3 2 + 2$

$\sim 2^{-x^2} < 3 = 2^{\log_2 3} = 2^{-(-\log_2 3)}$

$-x^2 < \log_2 3 \rightarrow x^2 > -\log_2 3 \rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$

1.11 i)  $5-x > \sqrt{x^2+6x+8}$

$25+x^2-10x > x^2+6x+8$

$-16x > -17 \rightarrow x < \frac{17}{16}$

$\mathbb{D}: x^2+6x+8 \geq 0$

$(x+4)(x+2) \geq 0$

$x \leq -4 \vee x \geq -2$

$x > -2$

$x > -4$

|    |    |
|----|----|
| -4 | -2 |
| -  | +  |
| -  | +  |
| +  | +  |
| +  | +  |

es 1.5)  $a, b \in \mathbb{R}$

$ab \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = ? \quad [\text{se } a, b \geq 0 \text{ o } a, b \leq 0]$

①  $a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$

②  $a, b \leq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{(-a)} \sqrt{(-b)} = \sqrt{-a} \sqrt{-b}$

es 1.3 f) calcola sup, inf, max, min di  $f(-1)^n - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}$

$n=0 \rightarrow 0 \in A, n=1 \rightarrow -\frac{3}{2} \in A, n=2 \rightarrow \frac{2}{3} \in A$

• 1 è un maggiorante di A  $\rightarrow (-1)^n - \frac{1}{n+1} \leq 1$

$\exists \sup A = 1$  se  $\forall a < 1, a$  non è maggiorante

Sia  $a < 1$  pongo  $a = 1 - \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$

se  $1 - \varepsilon$  non è magg.  $\Leftrightarrow n \in \mathbb{N}: (-1)^n - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon$

Considero  $n$  pari  $n = 2K$  ~~così~~  $[così (-1)^n = 1]$

$1 - \frac{1}{2K+1} > 1 - \varepsilon \rightarrow \varepsilon < \frac{1}{2K+1} \rightarrow K > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

1 non è il max perché non è contenuto in A.

[per  $n$  dispari  $a_n < 0$   
 per  $n$  pari  $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ]

•  $(-1)^n - \frac{1}{n+1} \geq -1 - 1 = -2 \rightarrow -2$  è un minorante

$-2 \in A: (-1)^n - \frac{1}{n+1} \geq 0$  se  $n$  è pari,  $-1 - \frac{1}{n+1} > -2$  se  $n$  è dispari

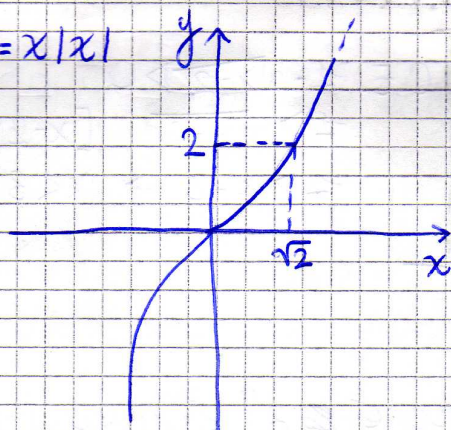
Se  $a = -2 + \varepsilon$  e trovo un  $a_n < -2 + \varepsilon \Rightarrow -2 + \varepsilon$  non è minorante

$-1 - \frac{1}{n+1} < -2 + \varepsilon = -1 - 1 + \varepsilon \rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\inf A = -2 = \min A$

21/10/21

es 1 ~~es 1~~  $f(x) = x|x|$



$$A = \{x : x|x| > 2\}$$

$$= (\sqrt{2}; \infty)$$

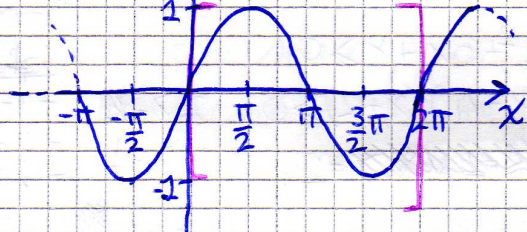
$$\sqrt{2} = \inf A$$

• se  $A$  non è limitato superiormente diremo che  $\sup A = +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists x \in A : x > M$$

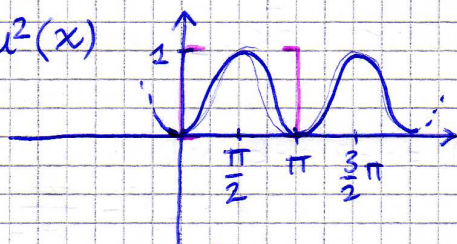
**DEF** un periodo per  $f$  è un numero  $T > 0$  :  $f(x+T) = f(x) \forall x$   
 Il periodo di  $f$  è il periodo  $T$  più piccolo.

$$f(x) = \sin x$$



$$T = 2\pi$$

$$f(x) = \sin^2(x)$$



$$T = \pi$$

$$\bullet f(x) = \sin 4x \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

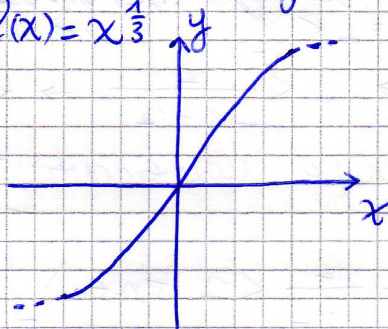
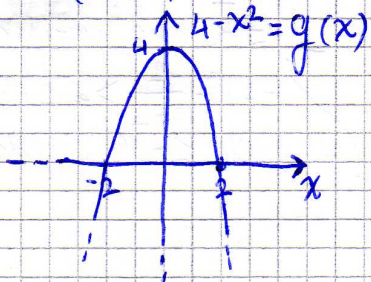
$$\bullet f(x) = \sin \frac{x}{2} \rightarrow T = 4\pi$$

il periodo di una funzione tipo  $\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3}$  è il minimo comune multiplo dei periodi delle due.  $(T = 12\pi)$

es 2.1 e)  $f(x) = \sqrt[3]{4-x^2}$  → trovare  $\inf(f)$   $D = \mathbb{R}$

$$\inf(4-x^2) = ]-\infty; 4]$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

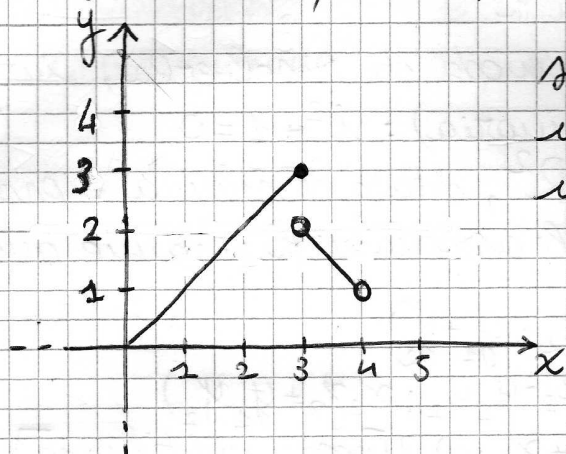


$$\inf(f \circ g) = (-\infty; 4^{\frac{2}{3}}]$$

es 2.8 b)

~ sia  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 5-x, & 3 < x < 4 \end{cases}$

$D = [0; 4)$  calcolare  $\max$ ,  $\min$ ,  $\sup$  e  $\inf$  di  $f$



$\sup(f) = \sup \text{im}(f) = 3 = f(3)$

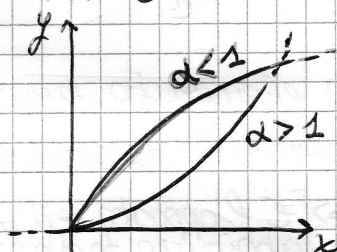
$\max(f) = \text{il punto } x = 3$

$\min(f) = \inf(f) = f(0) = x_0 = 0$

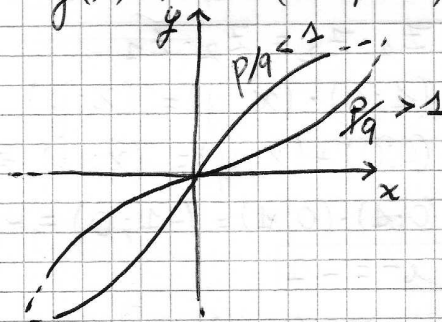
## GRAFICI DI FUNZIONI ELEMENTARI

• Rette  $\rightarrow D = \mathbb{R}$

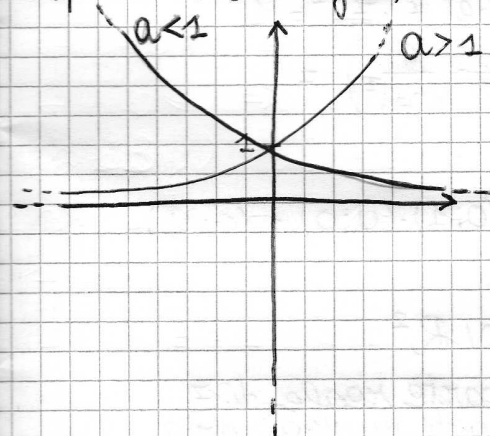
•  $f(x) = x^\alpha \rightarrow \alpha < 0$



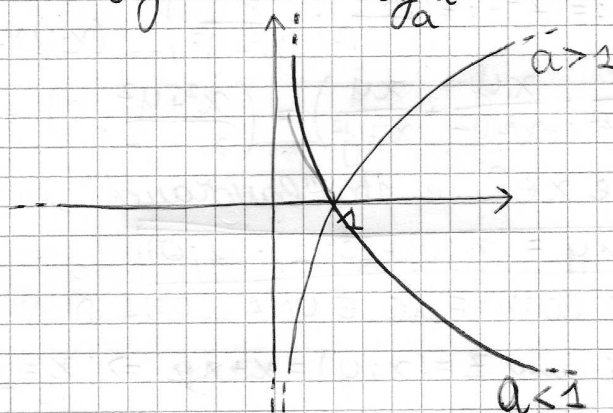
•  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$  (dispari)



• esponenziali:  $f(x) = a^x$



• logaritmi:  $\log_a x$



# NUMERI Complessi

23/10/14

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow$  non ha soluzioni in  $\mathbb{R}$

Idea intuitiva: estendere  $\mathbb{R}$  in modo da risolverla, introduce un numero  $i$  (unità immaginaria):  $i^2 + 1 = 0$

$\mathbb{C}$  = campo numeri complessi =  $\mathbb{R}^2$ , dotato di somma e prodotto  
[IN GENERALE un campo soddisfa gli assiomi di  $\mathbb{R}$  tranne quelli in cui c'è  $\leq$  e il XVI]

SOMMA:  $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) := (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

PRODOTTO:  $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2)$

\*OSS.1:  $(x; 0) \rightarrow (x; 0) + (x_2; 0) = (x + x_2; 0)$  } posso identificare  
 $(x; 0) \cdot (x_2; 0) = (x x_2; 0)$  }  $\{(x; 0) | x \in \mathbb{R}\}$  con  $\mathbb{R}$

\*OSS.2:  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$

\*OSS.3:  $(1; 0) \cdot (x; y) = (x; y) \Rightarrow (1; 0)$  elemento neutro del prodotto  
 $(0; 0) + (x; y) = (x; y) \Rightarrow (0; 0)$  elemento neutro della somma

\*OSS.4:  $(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -(1; 0) \Rightarrow$  è l'opposto dell'unità, quindi abbiamo trovato un numero moltiplicato per se stesso dà -1  
 $i^2 = -1$

\*OSS.5: Sia  $z = (x; y) \neq 0$

$1/z := z^{-1} := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}; -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \rightarrow$  verificare che  $z \cdot z^{-1} = 1$   
 $= \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}; \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}; 0 \right) = (1; 0)$

•  $x = (x; 0)$  se  $x \in \mathbb{R}$  e sto "lavorando" in  $\mathbb{C} \rightarrow (0; 1) \cdot (y; 0) = (0; y)$

$(x; y) = x + iy = (x; 0) + (0; 1) \cdot (y; 0)$

UN NUMERO COMPLESSO È UNA COPPIA DI NUMERI IN  $\mathbb{R}^2$

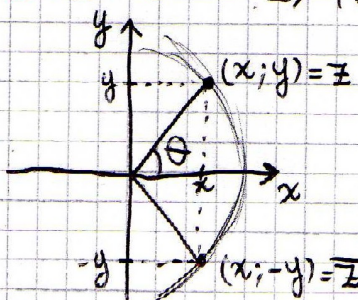
NOTAZIONE: dato  $z = (x; y) = x + iy \Rightarrow x = \text{Re } z = \text{parte reale di } z$   
 $y = \text{Im } z = \text{parte immaginaria}$

DEF.  $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

DEF.  $\bar{z} :=$  coniugato di  $z = (x; -y)$

$z \cdot \bar{z} = (x; y) \cdot (x; -y) = (x^2 + y^2; 0) = x^2 + y^2 = |z|^2$

\*OSS.:  $z^{-1} = \bar{z} / |z|^2$  ma allora  $z^{-1} \cdot z = (\bar{z} / |z|^2) \cdot z = 1$



DEF.  $z \neq 0$ ,  $\arg(z)$  è l'angolo  $\theta$  in radianti tra la direzione  $(1; 0)$  e  $z$

$z = |z| \cos \theta + i |z| \sin \theta = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

es.  $z_1 = x_1 + iy_1$ ;  $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

→ infatti  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$   
e  $\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

~~DEFINIZIONE~~ DEF.  $e^{i\theta} := (\cos \theta + i \sin \theta)$

FORMULA DI EULERO:  $e^{i\pi} = -1$  ;  $e^{i\pi} + 1 = 0$