

→ infatti $\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$
 $\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

~~DEF. FORMULA DI EULERO~~ DEF. $e^{i\theta} := (\cos \theta + i \sin \theta)$

FORMULA DI EULERO: $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\pi} + 1 = 0$

26/10/14

RIEPILOGO

$z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 := (x_1; x_2) = x_1 + ix_2 = (x_1; 0)(1; 0) + (0; 1)x_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$r = |z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

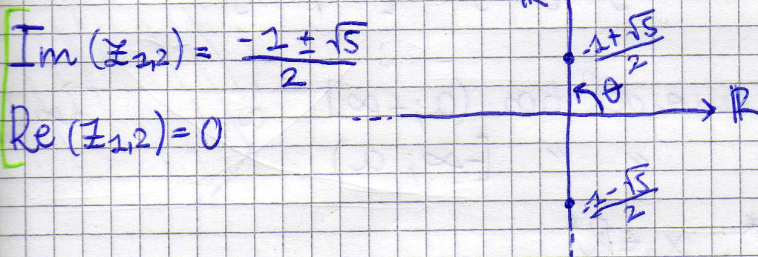
$[i = i \sin \frac{\pi}{2}; |i| = 1; \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $P_n(z)$ un polinomio di grado n in $\mathbb{C}$, cioè $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z$ con $a_n \neq 0$, coefficienti a_k e la variabile $z \in \mathbb{C}$, $a_0 = P_n(0)$ termine noto. Allora $P_n(z) = 0$ ha almeno una soluzione $z_0 \in \mathbb{C}$.

CONSEGUENZA: esistono n numeri complessi $z_1, \dots, z_n$ (radici di P_n) t.c. $P_n(z) = a_n \cdot (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

es. $z^2 + iz + 1$ $z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-i \pm i\sqrt{5}}{2} = i \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$
 $[a_2=1; a_1=i; a_0=1]$



$\text{Im}(z_{1,2}) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\text{Re}(z_{1,2}) = 0$

$z_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z^2 + iz + 1 = \left(z - \frac{\sqrt{5}-1}{2}i\right) \left(z + \frac{\sqrt{5}+1}{2}i\right)$

es. $z^n = W \rightarrow$ trovare le radici n -esime di W

$P_n(z) = 0$ con $P_n(z) = z^n - W$; $a_0 = W$

SOLUZIONE ($W \neq 0$):

$z^n = r^n e^{in\theta}$, $W = r_0 e^{i\theta_0}$

$\rightarrow r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0} \Rightarrow r_n = r_0 \Leftrightarrow r = r_0^{\frac{1}{n}} > 0$

Dobbiamo determinare $e^{in\theta} = e^{i\theta_0} \Leftrightarrow n\theta = \theta_0 + 2k\pi$

$\theta^{(0)} = \frac{\theta_0}{n}$; $\theta^{(1)} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}$

se $n \geq 2$ $\theta^{(1)} \neq \theta^{(0)} + 2k\pi$

$\theta^{(n-1)} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$; $\theta^{(n)} = \frac{\theta_0}{n} + 2\pi$

CONCLUSIONE: abbiamo trovato esattamente n soluzioni diverse di $z^n = W$ date da

$z_k = |W|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\theta^{(k)}}$

con $\theta^{(k)} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$; $0 \leq k \leq n-1$

OSS. $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

FORMULA DI DE MOIVRE: $z^k = r^k e^{ik\theta} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Corrispondono ad angoli uguali

Limite

28/10/14

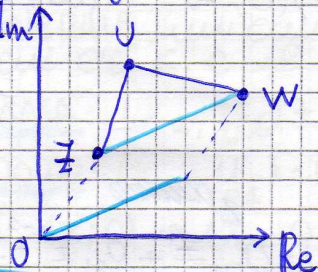
• DISTANZA in $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x; y) = |x - y|$

(i) $d(x; y) = d(y; x)$

(ii) $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$ [DISTANZA TRIANGOLARE]

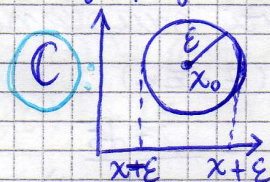
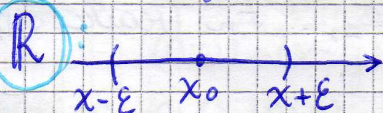
es. Im



$$d(z; w) = |w - z|$$

$$zu + uw \geq zw$$

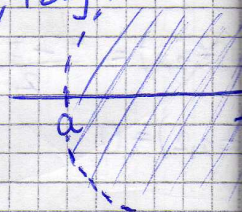
$B_\varepsilon(x_0)$ = INTORNO SFERICO di raggio $\varepsilon > 0$ e centro x_0
 $= \{y \mid d(y; x_0) < \varepsilon\} = \{y \mid |y - x_0| < \varepsilon\}$



DEF retta estesa $\mathbb{R}^*$ (oore star) = $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \Rightarrow [-\infty; +\infty]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

- un intorno di $+\infty$ è un insieme del tipo $(a; +\infty]$
- un intorno di $-\infty$ " " " " " " $[-\infty; a)$



PUNTO DI ACCUMULAZIONE $E \subseteq \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$

x_0 è un punto di accumulazione per E se $\forall$ intorno U di x_0 ,
 $(U \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$, $\exists x \neq x_0 \mid x \in U, x \in E$.

es. $x_0 = 0$ $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $x_0 \notin E$

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$B_\varepsilon(x_0) = U = (-\varepsilon; \varepsilon)$, x_0 è punto di acc. se $\frac{1}{n} \in U \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\sim E = (0; 1) \rightarrow$ punti di accumulazione di $E = [0; 1]$

$\sim E = \mathbb{N} \rightarrow$ l'unico punto di acc. è $+\infty$.

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad (a; +\infty] \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid n > a$$

DEF. sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di acc. per $X \in \mathbb{R}^*$

allora una proprietà P si verifica DEFINITIVAMENTE per
 $x \rightarrow x_0$ (x che tende a x_0) se $\exists$ un intorno U di x_0 t.c.

P vale $\forall x \in U, x \neq x_0$.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE di $x \in \mathbb{R}^*$ per $A \subseteq \mathbb{R}^*$

è un intorno U di x che contiene punti di A diversi da x
 $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$+\infty$ è un punto di accumulazione per $A \Leftrightarrow A$ non è limitato s
 $\{\text{punti di acc. di } \mathbb{Z}\} = \{+\infty; -\infty\}$

DEF. PUNTO INTERNO: Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $x \in A$, x è interno ad A se $\exists$ un intorno $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ (per qualche $\varepsilon > 0$).

- * x è **ESTERNO** ad A se è interno ad A^c [A complementare]
- * x è **DI FRONTIERA** per A se non è né interno né esterno.
- * A è **aperto** se ogni $x \in A$ è un punto interno. $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono aperti.
- * A è **chiuso** se A^c è aperto $\rightarrow \emptyset = \mathbb{R}^c$ e $\mathbb{R} = \emptyset^c \rightarrow$ sono gli unici insiemi aperti che chi
- * La **FRONTIERA** di A (∂A) sono tutti i punti di frontiera di A

~ ESEMPLI DI INSIEMI APERTI: $\mathbb{R}, \emptyset, (1; 2) = \{x: 1 < x < 2\} \rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq (1; 2)$
 $(1; 2) \cup (3; 4) \rightarrow$ unione di due intervalli è un insieme aperto.
 ogni intervallo è un insieme aperto
 $0 \leq \varepsilon \leq \min\{|x-1|, |x-2|\}$

- Se A_i è una famiglia di insiemi aperti per $i \in I \Rightarrow \bigcup A_i$ è aperto
- Se A e B sono aperti $\Leftrightarrow A \cap B$ è aperto
- ~ ESEMPLI DI INSIEMI CHIUSI: $\mathbb{R}, \emptyset, (1; 2)^c = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \mathbb{Z}$
 $[1; 2] = ((-\infty; 1) \cup (2; +\infty))^c$

[se gli estremi sono esclusi A è aperto, se sono inclusi A è chiuso]

- Se A e B sono chiusi, sia $A \cup B$ che $A \cap B$ sono chiusi
- Se A_i sono chiusi $\Rightarrow \bigcap A_i$ è chiuso.

$\rightarrow \mathbb{Q}$ NON È NE APERTO NE CHIUSO. $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

DEF. dato A , $\overset{\circ}{A}$ = INTERNO DI $A = \{x \mid x \text{ è interno ad } A\}$

es. $\mathbb{Q} = \emptyset, [0; 1] = (0; 1)$

$\bar{A}$ = CHIUSURA DI $A = A \cup \partial A$

PUNTO ISOLATO: $x \in A$ è isolato se $\exists B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$

Teorema: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^*$ chiuso e limitato $\Rightarrow E$ ha massimo e minimo
 $\rightarrow \exists \{x; y \in E \mid x \leq t \leq y, \forall t \in E\}$

DIM. $E \neq \emptyset$, limitato sup $\Rightarrow \exists y = \sup E \in \mathbb{R}$

supponiamo per assurdo che $y \notin E$, ossia $y \in E^c$ che è aperto
 (essendo E chiuso) $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (y - \varepsilon; y + \varepsilon) = B_\varepsilon(y) \subseteq E^c$, ma allora
 $y - \varepsilon$ è un maggiorante per E il che è assurdo.

33(e) punti di accumulazione in $\mathbb{R}^*$ del dominio di $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x-4}}$

$$D: \begin{cases} \frac{3-x}{x-4} \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3-x > 0 \rightarrow x < 3 \\ x-4 > 0 \rightarrow x > 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ + \quad - \\ - \quad + \\ - \quad - \end{array} \quad D: [3; 4)$$

punti di accumulazione di $[3; 4) = [3; 4]$.

• $f(x) = \log_5(3x-12)$ D: $3x-12 > 0 \rightarrow x > 4 \rightarrow (4; +\infty)$

punti acc. = $[4; +\infty) \cup \{+\infty\}$

3.4 determinare se esistono $\sup f$, $\inf f$, $\max$ e $\min$.

• $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ha un massimo locale in $x_0 \in X$ se $\exists$ un intorno di x_0 , $B_\varepsilon(x_0)$, t.c. $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in X \cap B_\varepsilon(x_0)$

$X = (0; 3]$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ x-1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$
(DOMINIO)

$E = \{f(x) \mid x \in X\} = (0; 2] \rightarrow 0 = \inf E$ non minimo
 $2 = \max E = f(3)$

3/22/14

• Intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ $\begin{cases} -\infty < x < +\infty & \forall x \in \mathbb{R} \\ +\infty \geq x & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ -\infty \leq +\infty \end{cases}$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $B_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

un intorno di $+\infty$ è $(a, \infty) \cup \{\infty\}$, di $-\infty$: $(-\infty; a) \cup \{-\infty\}$

• Punti di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}^*$ per $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow \forall$ intorno U di x_0 $U \cap A$ contiene punti $\neq x_0$

• DEF. una proprietà P è definitivamente vera per $x \rightarrow x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}^*$ se esiste un intorno U di x_0 t.c. P è vera $\forall x \in U$.

DEF. DI LIMITE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (punto di accum. per X) e $l \in \mathbb{R}^*$, $\forall V$ intorno di $l \exists$ un intorno U di x_0 , $\forall x \in U, x \neq x_0 \rightarrow f(x) \in V$
- Trovo un U di x_0 | $\forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap X$ t.c. $f(x) \in V$. $x \neq x_0$

• CASO $l = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$

① fissa V intorno di $-\infty$ [$V = (-\infty; a)$]

② trovo U intorno di x_0 , $U = B_\delta(x_0)$, t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\}$
 $f(x) < a$

SE $l \in \mathbb{R}$ IL LIMITE SI DICE FINITO.

• CASO DELLE SUCCESSIONI: una successione è una funzione reale con dominio $X = \mathbb{N}$. $x = n$, $f(x) = a_n$

x_0 = punto di accumulazione per $X = \mathbb{N}$ è solo $x_0 = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M: |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > M$$

es. scrivere la definizione di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

DEF. DI LIMITE CON " ε e δ " (corrisponde al caso in cui $x_0, l \in \mathbb{R}$) (2)

[DEF (1): $\forall V$ intorno di $l \exists$ un int. U di x_0 t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X, x_0 \neq x$
 $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in X: 0 < |x - x_0| < \delta$]

• $f(x) = x$, $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 7$, $l = ? = 7$

Dato $\varepsilon > 0$ voglio trovare $\delta > 0: |x - 7| < \varepsilon \quad \forall 0 < |x - 7| < \delta \Rightarrow \varepsilon = \delta$

• $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $l = ? = 0$

Sia $\varepsilon > 0$, devo trovare $\delta: |x^2 - 0| < \varepsilon \quad \forall |x - 0| < \delta \Rightarrow x^2 < \varepsilon \quad \forall |x| < \delta = x^2 < \varepsilon$
 $\rightarrow \delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$

• $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [0; +\infty)$, $x_0 = 0$, $l = 0$

Dato $\varepsilon > 0$ trovare $\delta > 0: |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \quad \forall 0 \leq |x - 0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon$

TEOREMA: UNICITÀ DEL LIMITE

Il limite se $\exists$ è unico.

DIM. se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \Rightarrow l = l'$

se fosse $l \neq l'$ fissa V int. di l e V' int. di l' : $V \cap V' = \emptyset$

$\exists U, U'$ intorni di x_0 , ma $U \cap U'$ è un insieme che contiene x_0 .
 $y \in U \cap U' \setminus \{x_0\} \rightarrow f(y) \in V, f(y) \in V'$ il che è assurdo.