

DEF. CONTINUITÀ: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

17/11/2014

1 se x_0 è un punto isolato f è continua in x_0 .

2 se x_0 è un punto di accumulazione per X f è continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall |x - x_0| < \delta \quad x \in X$$

~ le due definizioni sono equivalenti.

Esempi: tutte le funzioni elementari sono continue.

• x^α , $P(x)$, a^x , $\log_a x$, f. trigonometriche, f. iperboliche

• $f(x) = |x| \rightarrow |f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$

• Data f definiamo la parte positiva di f : $f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$

Teoremi sulle funzioni continue

① f, g continue in $x_0 \Rightarrow af + bg, f \cdot g, f/g$ ($g \neq 0$) sono continue in x_0 .

② Permanenza del segno: se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ ha definitivamente lo stesso segno di $f(x_0)$.

$$\exists \delta |f(x) \cdot f(x_0)| > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta$$

③ composizione: $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in X, y_0 = f(x_0) \in Y, f$ cont. in x_0 e g cont. in $y_0 \Rightarrow g \circ f$ è cont. in x_0 .

$g(x) = x_+ \Rightarrow f_+ = g \circ f$ è continua se f anche lo è. (Analog $f_- = \min\{f, 0\}$)

$$f, g \text{ cont. in } x_0 \Rightarrow \max\{f, g\} = (f - g)_+ + g$$

~ se f **NON** è continua in x_0 :

(i) x_0 è una discontinuità eliminabile se $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases}$
è continua dove $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(ii) se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Rightarrow x_0$ è una discontinuità di prima specie
es: $f(x) = [x]$ ha disc. di 1ª specie su ogni $x_0 \in \mathbb{Z}$

(iii) tutti gli altri casi di discontinuità

TEOREMA (!)

- è un bel teorema
- è facile che venga chiesto all'esame
- è di uso molto frequente

ESISTENZA DEGLI ZERI.

sia f cont. su $[a; b]$, $-\infty < a < b < \infty$ e supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$
allora $\exists x_0 \in (a; b) : f(x_0) = 0$

DIM: (metodo di bisezione)

annuniamo che $f(a) < 0 < f(b)$

1) $a_0 = a$; $b_0 = b$

2) $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

OSS. $a_0 \leq a_1$ e $b_1 \leq b_0$

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}$$

3) se $f(c_0) < 0 \Rightarrow a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

se $f(c_0) > 0 \Rightarrow a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$

se $f(c_0) = 0 \Rightarrow x_0 = c_0$

4) ITERO: dopo un numero K finito di iterazioni trovo $f(c_K) = 0$ e il teorema è dimostrato con $x_0 = c_K$

• annunio tre successioni $a_K \leq c_K \leq b_K$

a_K monotona crescente, b_K decrescente e limitate

$$a_K \leq b ; a \leq b_K \Rightarrow \exists \lim_{K \rightarrow \infty} a_K = \alpha, \lim_{K \rightarrow \infty} b_K = \beta \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(a_K) < 0 < f(b_K) \Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} b_K - a_K = \beta - \alpha = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^K} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

• Affermo che $x_0 = \alpha = \beta$ e $f(x_0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_0) = \lim_{K \rightarrow \infty} f(a_K) \leq 0 \\ f(x_0) = \lim_{K \rightarrow \infty} f(b_K) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_0) = 0$$

TEOREMA (!!)

("Ve lo dovete studiare se volete passare l'esame")

18/11/14

$f \in C([a; b])$, $-\infty < a < b < +\infty$
 $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

• GENERALIZZAZIONE: $f, g \in C([a; b])$, $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$
 $\Rightarrow \exists x_0 \in (a; b) : f(x_0) = g(x_0)$

DIM: consideriamo la funzione $f - g \in C([a; b])$, $f - g = F$
e $F(a) < 0 < F(b) \Rightarrow \exists x_0 \mid F(x_0) = 0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia I un intervallo e $f \in C(I)$ [f è continua in I]

Allora $\inf f < y < \sup f \Rightarrow \exists x_0 \in I : f(x_0) = y$

DIM: $\exists a : f(a) < y$, $\exists b : f(b) > y$

applichiamo il teorema (!!) con $f(x) - y \Rightarrow \exists x_0 \mid f(x_0) = y$

In altre parole se f è continua in $I \rightarrow \mathbb{R}$ allora $f(I) = J$ è un intervallo

TEOREMA

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I = intervallo, f continua su I

f iniettiva $\Leftrightarrow f$ è strettamente monotona

DIM: " $\Leftarrow$ " è ovvia (se è monotona strett. è sicuramente iniettiva)

" $\Rightarrow$ " supponiamo per assurdo che f non sia strett. monot.

cioè che per $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2))$

- applico il teorema dei valori intermedi a f su $[x_1, x_2]$ e $y = f(x_3)$

$\Rightarrow \exists x_4 \in (x_1, x_2) : f(x_4) = f(x_3)$ e $x_4 < x_3 \rightarrow$ contraddizione.

TEOREMA

$f \in C(I)$, I intervallo, f iniettiva (invertibile)

allora f^{-1} è definita sull'intervallo $J = f(I)$ e $f^{-1} \in C(J)$

DIM: Sappiamo che J è un intervallo e sappiamo che f è strett. monotona, quindi $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ è anche strett. monotona.

Quindi se avessimo un punto y_0 di discontinuità sarebbe di 1ª specie, ossia un salto, ma questo non sarebbe compreso nell'immagine la quale non sarebbe allora un intervallo (contraddizione).

Successioni

20/11/14

DEF. Una successione è una funzione di dominio $\mathbb{N}$ che si denota con $\{a_n\}: n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \in \mathbb{R}$ (codominio $= \mathbb{R}$).

OSS. unico punto di accumulazione del dominio è $+\infty$

DEF. Se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}^*$ la succ. si dice regolare $\left\{ \begin{array}{l} \text{convergente se } l \in \mathbb{R} \\ \text{divergente se } l = \pm \infty \end{array} \right.$ altrimenti è irregolare (es. $(-1)^n$).

Risultati che già conosciamo:

① Permanenza del segno: se $a_n \rightarrow l$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$) $\neq 0$, allora la successione ha definitivamente lo stesso segno di l .

② Confronto: $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente, e $a_n, c_n \rightarrow l \Rightarrow b_n \rightarrow l$

③ a_n monotona: crescente $\Rightarrow a_n \rightarrow \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
decrecente $\Rightarrow a_n \rightarrow \inf \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

es. $a_0 = 0, a_1 = 5, a_n = 1 - \frac{1}{n}$ per $n \geq 2$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = \sup \{a_n | n \geq 2\}$ ($\sup \{a_n | n \geq 0\} = 5$)

④ se $\{a_n\}$ è convergente $\Rightarrow$ è limitata

DIM. $a_n \rightarrow l$, so che $\exists N: n \geq N \Rightarrow a_n \in (l-1; l+1)$

$M = \max \{|a_1|, \dots, |a_N|\} \Rightarrow$ tutta la successione è limitata

"Infiniti" a confronto

$\log_a n \ll n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n$
 $a > 1 \quad a > 0 \quad a > 1$

$\left[\begin{array}{l} a_n \ll b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ \text{molto minore} \end{array} \right]$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ definit. $\exists N | \frac{a}{n} < \frac{1}{2} \forall n \geq N$

$$\frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 1} = \underbrace{\left(a \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N-1} \right)}_C \cdot \frac{a}{N} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N+K} < C \left(\frac{1}{2} \right)^{K+1} \rightarrow 0$$

$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 1} \geq n \rightarrow +\infty$

FORMULA DI STIRLING

$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$ (le due funzioni sono asintotiche: per $n \rightarrow \infty$ si comportano allo stesso modo)

$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftrightarrow a_n = b_n(1 + o(1))$

DEF. Data $\{a_n\}$, una sua sottosuccessione è una successione $\{a_{k_n}\}$ $n \in \mathbb{N}$ con $\{k_n\}$ successione strett. crescente a valori in $\mathbb{N}$

es. $a_n = (-1)^n$ trovare $k_n: a_{k_n}$ è convergente

$k_n = 2n \quad (-1)^{k_n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1$

oppure $k_n = 2n+1 \quad (-1)^{2n+1} = -1$

Prop: $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow a_{k_n} \rightarrow l \quad \forall$ sottosuccessione a_{k_n}

Dim: $\Leftarrow: k_n = n$

$\Rightarrow: \forall$ intorno U di $l \exists N: a_n \in U \quad \forall n \geq N$

Sia $a_{k_n} (k_n \rightarrow +\infty) \Rightarrow \exists M \quad k_n \geq N \quad \forall n \geq M \Rightarrow a_{k_n} \in U \quad \forall n \geq M$

• $k_n \geq n: k_1 \geq 1, k_2 > k_1 \Rightarrow k_2 \geq 2$ per induzione $k_n \geq n \Rightarrow k_n \rightarrow \infty$ (caufroubo)

es. calcolare $\lim \sqrt[n]{n}$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n} \rightarrow 1 \quad (\text{perché } \frac{1}{n} \ln n \rightarrow 0)$$

DEF. $\{a_n\}$ si dice FONDAMENTALE o "DI CAUCHY"

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ si ha che $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

CANTOR (1872): $\mathbb{R}$ è l'insieme delle classi di equivalenza delle successioni fondamentali a valori in $\mathbb{Q}$.

TEOREMA:

$\{a_n\}$ è convergente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ è fondamentale

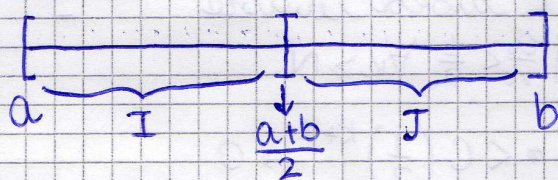
DIM: " $\Rightarrow$ " $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \exists N: |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) + (l - a_m)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

sia $\{a_n\}$ limitata. Allora $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ convergente.

DIM: (SUL LIBRO È DIVERSA): $\exists a < b: a \leq a_n \leq b \quad \forall n$



$$N = \{n | a_n \in I\} \quad N' = \{n | a_n \in J\}$$

CHIARAMENTE non possono avere entrambi un numero finito di elementi

Pongo $I_1 = I$ se N è infinito, altrimenti pongo $I_1 = J$, e itero.

$$I_k = [a_k, b_k], \quad I_0 = [a, b], \quad I_1 = [a_1, b_1]$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad a_k \nearrow l \nwarrow b_k \quad (a_k \text{ è crescente, } b_k \text{ decrescente})$$

$$\#\{n | a_n \in I_k\} = +\infty \quad [\# = \text{cardinalità} = \text{numero di elementi dell'insieme}]$$

$$k_0 = 0 \quad a_0 \in I_0 = I$$

$$k_1 > k_0 \text{ e t.c. } a_{k_1} \in I_1, \quad k_2 > k_1 \text{ e t.c. } a_{k_2} \in I_2 \text{ etc.}$$

$$a_n \leq a_{k_n} \leq b_n \Leftrightarrow a_{k_n} \in I_n \Rightarrow \text{per il t. del caufroubo } a_{k_n} \rightarrow l$$

⊗ DIM: $\{a_n\}$ fondamentale $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

$$1. \varepsilon = 1 \quad \exists N: |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N, \quad |a_n - a_n| < 1 \quad \forall n \geq N$$

$$2. \exists k_n: a_{k_n} \rightarrow l \quad \text{per B.W.}$$

$$3. \text{ma allora } a_n \rightarrow l \text{ infatti } \exists N: |a_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

$$\text{e t.c. } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N, \quad \exists M \geq N: k_n \geq N \quad \forall n \geq M$$

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq M$$