

SERIE NUMERICHE

27/11/14

$$a_n, a_n \in \mathbb{R} := a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n \text{ (SOMMA)}$$
$$\{a_n\} \rightarrow \{s_n\} \text{ successive}$$

$$f_0(x) \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1$$

$$S_n(x) \rightarrow +\infty \text{ as } x \geq 1$$

irregolare se $x \leq -1$

SERIE DI MENGOLI

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow \textcircled{1}$$

(si semplifica tutto)

DEF. Data $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n$ con $0 \leq n_0 \leq n_1$
($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$)
 $:= a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1}$

$$26. \sum_{n=-1}^2 \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\sum_{n=3}^3 \sin(n\pi) = \sin 3\pi = 0$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

- SERIE DI MENGOLI = $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

So $\sum_{k=1}^n x^n = \overset{n=1}{x^n} + \overset{n=2}{x^n} + \overset{n=3}{x^n} + \dots + \overset{n=n}{x^n}$ (per n volte) $= n x^n$

$$\sum_{k=-1}^n x^k = (n+2)x^n$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+m} x^k = \lim_{m \rightarrow \infty} (x^n + x^{n+1} + \dots + x^{m-1} + x^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} x^n (1 + x + \dots + x^m)$$

Summe
geometrisch
 $S(x)$

$$= x^n \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x^n}{1-x} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, x < 1, x \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+m} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n (1 + x + \dots + x^m) = 0 \quad (x < 1)$$

DEF. Data $\{a_n\}$ definita per $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^m a_n :: \text{SERIE DEGLI } a_n, \text{ con termini } a_n$$

es. $\sum_{k=n}^{\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x} \quad \left[\begin{array}{l} |x| < 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \text{ oppure } \begin{array}{l} 0 < |x| < 1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=2}^{n+1} \frac{1}{(n-1)n} \rightarrow \left[\text{la serie di Mengoli si può scrivere in entrambi i modi.} \right]$$

CRITERIO DI CAUCHY

Se $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ è convergente $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

es. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \rightarrow 1 \Rightarrow$ non converge

DIM: se $S_n \rightarrow l$ converge, anche $S_{n+1} \rightarrow l$.

$$S_{n+1} - S_n \rightarrow 0 \Rightarrow S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \rightarrow 0$$

ATTENZIONE!!! $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

ma $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$
(somma dei termini $\geq \frac{1}{\sqrt{n}}$)
 $\downarrow$
NON CONVERGE

INVECE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \rightarrow$ CONVERGENTE

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^m \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^m \frac{1}{n(n-1)} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

FUNZIONE ZETA DI RIEMANN

$$\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{- per } \alpha = \frac{1}{2} \text{ DIVERGE} \\ \text{- per } \alpha = 2 \text{ CONVERGE} \end{array}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$\{a_n\} :=$ successione dei termini della serie

1/12/14

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

è necessario che $a_n \rightarrow 0$ affinché la serie possa convergere.

se $a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ la serie NON converge.

ma anche se $a_n \rightarrow 0$ non è detto che converga.

ad esempio $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n \rightarrow 0$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{Se } S_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \\ a_n = S_n - S_{n-1} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad l \quad l \end{array} \right]$$

$a_n = x^n$ se $|x| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ non converge

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\text{inoltre } x^m + x^{m+1} + \dots + x^{m+n} = x^m \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^m}{1 - x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{x^m}{1 - x} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \text{ se } m > 0$$

DEF. $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ è una CODA della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente (regolare) $\Leftrightarrow \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ è convergente

INFATTI:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \geq 1$$

$$S'_n = \sum_{k=m}^n a_k, n \geq m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n - S'_n = a_1 + a_2 + \dots + (a_m + \dots + a_n) - (a_m + \dots + a_n) = \\ = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} \end{array} \right.$$

qui fissiamo m e studiamo, al variare di n , S_n e S'_n
 S_n e S'_n hanno lo stesso comportamento.

nel caso in cui convergono: $S_n \rightarrow l \Rightarrow S'_n = l - (a_1 + \dots + a_{m-1})$

DEF. $\sum a_n \approx \sum b_n$ se le due serie hanno lo stesso comportamento.

cioè $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge

" diverge $\Leftrightarrow$ " diverge

" è irregolare $\Leftrightarrow$ " è irregolare

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=m}^{\infty} a_n \Rightarrow$ se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} a_n = 0$

$$\text{INFATTI } \sum_{n=m}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\rightarrow l} - \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} a_n}_{\rightarrow l} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

oss: • se $\alpha \neq 0$ $\sum a_n \approx \sum \alpha a_n$

• se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono convergenti, $\sum_1^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_1^\infty a_n + \beta \sum_1^\infty b_n$.

CRITERI DI CONVERGENZA (serie a termini ≥ 0 , $\sum a_n$, $a_n \geq 0$)

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$ è CRESCENTE ($S_n \geq S_{n-1} \forall n \geq 2$)
 $\Rightarrow S_n$ è regolare: o converge o diverge a $+\infty$.

CRITERIO DEL CONFRONTO: $\{a_n\}, \{b_n\}$, $a_n \geq 0, b_n \geq 0, a_n \leq b_n \forall n \geq N$

allora $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

$\sum a_n = \pm \infty \Rightarrow \sum b_n$ diverge

DIM: se $n \geq N$

$$\sum_{k=N}^n a_k \leq \sum_{k=N}^n b_k$$

CONFRONTO ASINTOTICO: ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$)

se $a_n \sim b_n$ ($\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1, a_n = b_n(1 + o(1))$) $\Rightarrow \sum a_n \approx \sum b_n$

DIM: $\exists N: \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ (def. di limite con $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

ma, in generale $\sum c_n \approx \sum \alpha c_n$ se $\alpha > 0$

$$\left. \begin{aligned} \sum b_n \approx \sum b_n/2 \approx \sum \frac{3}{2} b_n \\ b_n \leq 2a_n \\ a_n \leq \frac{3}{2} b_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum a_n \approx \sum b_n$$

• **ESTENSIONE** ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$)

se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n \approx \sum b_n$, $\frac{a_n}{\alpha b_n} \rightarrow 1 \Rightarrow \sum a_n \approx \sum \alpha b_n \approx \sum b_n$

esercizi:

① $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$ [DIMOSTRARE CHE LA SERIE DIVERGE]

$$\downarrow \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^n \frac{1}{K} \geq \sum_{n=1}^n \frac{1}{K^2} \downarrow$$

DIVERGE ? CONVERGE

$$1 + 1/2 + \underbrace{(1/3 + 1/4)}_2 + \underbrace{(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)}_4 + \underbrace{(1/9 + \dots + 1/16)}_8 + \underbrace{(1/17 + \dots + 1/32)}_{16} >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow +\infty$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2 \right) \quad \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \right) \text{ ecc.}$$

• $\sum \frac{1}{n^s}$: $\left[\begin{aligned} &\text{se } s \geq 2 \text{ converge. } \sum \frac{1}{n^s} \leq \sum \frac{1}{n^2} \\ &\text{se } s \leq 1 \text{ diverge. } \sum \frac{1}{n^s} \geq \sum \frac{1}{n^2} \end{aligned} \right]$

② $\sum \frac{n^2 + 3n + 1}{n^5 + n^4 + n^3 + 1} \sim \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum a_n < \infty$

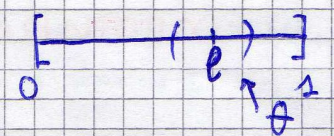
$$a_k \geq 0, \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow l : \text{ se } l < 1 \Rightarrow \sum a_k < \infty$$

$$\text{ se } l > 1 \Rightarrow \sum a_k = +\infty$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$a_k \geq 0; \sqrt[k]{a_k} \rightarrow l : \text{ se } l < 1 \Rightarrow \sum a_k < \infty$$

$$\text{ se } l > 1 \Rightarrow \sum a_k = +\infty$$

DIM: $l < 1$  $l < \theta < 1$

$$\text{DEFINIT. } a_k^{\frac{1}{k}} < \theta \Leftrightarrow a_k < \theta^k$$

quindi per il criterio del confronto con $\sum \theta^k < \infty \Rightarrow \sum a_k < \infty$

$$l > 1 \text{ DEFINITIVAMENTE } a_k^{\frac{1}{k}} > \theta \Rightarrow a_k > \theta^k, \theta > 1 \Rightarrow \sum a_k = +\infty$$

• Se $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow l \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow l$, ma non viceversa.

$$\sum \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{ se } \alpha \leq 1 \\ < \infty & \text{ se } \alpha > 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{k}}}\right)$$

$$\sqrt[k]{k} = k^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{\log k}{k}} \rightarrow 1$$

CRITERIO DI CONDENSATIONE DI CAUCHY

$$\begin{cases} a_k \geq 0 & \sum a_k \approx \sum 2^k a_{2^k} \\ a_k \downarrow 0 : (a_{k+1} \leq a_k, a_k \rightarrow 0 - \text{monotona decrescente e tende a zero}) \end{cases}$$

• esempio: $a_k = 1/k^\alpha, \alpha > 0$

$$2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k} \Rightarrow \sum \frac{1}{k^\alpha} \approx \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k \Rightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Rightarrow \alpha > 1$$

$$\text{QUINDI: } \sum \frac{1}{k^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

• esempio 2: $\sum \frac{1}{k(\log k)^\alpha}, \alpha > 0$

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{2^k (\log 2^k)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha (\log 2)^\alpha} \approx \sum \frac{1}{k^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

DIM: $a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + (a_9 + \dots + a_{16}) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) + \dots$

$$> \dots + 2^n a_{2^{n+1}} + \dots = \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2} + \dots$$

$$\text{quindi se } \sum 2^n a_{2^n} = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

SERIE GENERALI

$\sum a_n$ $a_n \in \mathbb{R}$ (non necessariamente ≥ 0)

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ in generale non è monotona crescente
in particolare $\sum a_n$ può essere irregolare.

Ricordiamo un teorema di Cauchy: $\{x_k\}$ converge solo se è fondamentale
cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists N: |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

Applichiamo questo teorema a $\{S_n\}$ con $m = n + k$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \text{se } n \geq N \text{ e } k \geq 0 \Rightarrow |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1$$

oss: $\left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j|$ quindi: $\sum |a_k|$ converge $\Leftrightarrow$ vale Cauchy
[$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$]

ma per $*$ $\Rightarrow \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| < \varepsilon \Rightarrow$ per Cauchy $\sum a_j$ converge

RIASSUNTO:

Se $\sum |a_k| < \infty \Rightarrow \sum a_k$ converge e $\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$

Se $\sum |a_k| < \infty$ si dice che $\sum a_k$ converge ASSOLUTAMENTE

Se $\sum a_k$ converge ma $\sum |a_k| = +\infty \Rightarrow$ converge semplicemente.

RICORDIAMO:

$$\sum \frac{1}{n(n-1)} = \sum \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} \nearrow 1 \quad [\text{SERIE TELESCOPICHE}]$$

Def: una serie $\sum a_n$ con $a_n = b_n - b_{n-1}$ ($S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

es: Mengoli è telescopica con $b_n = -\frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - b_{k-1} = b_1 - b_0 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_n - b_{n-1} = b_n - b_0$$

Se $b_k \rightarrow \ell \Rightarrow S_n \rightarrow \ell - b_0$

APPLICAZIONE ALLE SERIE GENERALI

$\sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, necessariamente $a_n \rightarrow 0$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \dots \quad [a_{n-1} \leq a_n]$$

$$S_{2k} \searrow \quad S_{2k+1} \nearrow \quad S_{2k-1} \leq S_{2k} \quad S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n \text{ converge}$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

$\sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0 \quad a_n \searrow 0$

allora $\sum (-1)^n a_n$ converge semplicemente (non sempre anche assolutamente)