

Derivate

FANCY

9/12/14

DEF: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto interno, f si dice derivabile in x_0 .

se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: \text{RAPPORTO INCREMENTALE DI } f \text{ rispetto a } x_0$

OSS: poniamo $h = x - x_0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$

Esempi: ① $f(x) = c \Rightarrow D(c) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0$

② $f(x) = x^n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-2}x + x_0^{n-1}) \rightarrow$

$\rightarrow n x_0^{n-1} \Rightarrow D(x^n) = n x^{n-1}$

③ $f(x) = e^x \Rightarrow D(e^x) = e^x$

④ $f(x) = \log x \Rightarrow D(\log x) = \frac{1}{x}$ [$\log x = \log_e x = \ln x$]

⑤ $f(x) = \sin x \Rightarrow D(\sin x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow D(\cos x) = -\sin x$

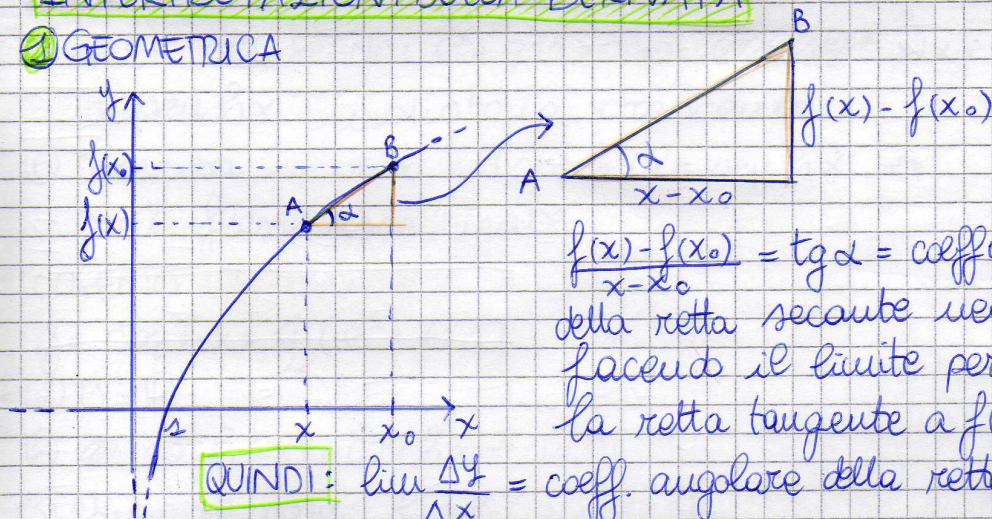
PROPOSIZIONE: se f e g sono derivabili in $x_0 \Rightarrow$ anche $af + bg$ ($a, b \in \mathbb{R}$)
è derivabile e $(af + bg)(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$

Cio vuol dire che la derivata è un operatore lineare.

DIM: $\frac{af(x) + bg(x) - (af(x_0) + bg(x_0))}{x - x_0} = \frac{af(x) - af(x_0)}{x - x_0} + \frac{bg(x) - bg(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} af'(x_0) + bg'(x_0)$

INTERPRETAZIONI DELLA DERIVATA:

① GEOMETRICA



$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{tg } \alpha = \text{coefficiente angolare}$

della retta secante nei punti A e B.

facendo il limite per $x \rightarrow x_0$ si ottiene

la retta tangente a $f(x)$ in x_0 .

QUINDI: $\lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{coeff. angolare della retta } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

② ANALITICA

DEF: $f'(x) = o(x^n) =: \text{"o piccolo di } x^n"$ per $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^n} = 0$

se $f'(x_0) = L$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow L$; $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \rightarrow 0$

~~$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \rightarrow 0$~~
 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{h} \rightarrow 0$

quindi dire che $f'(x_0) = L$ significa che:

$$f(x_0+h) - f(x_0) - Lh = o(h)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) + Lh = o(h)$$

OSSIA: $f(x_0) + f'(x_0)h$ è la migliore approssimazione lineare di f vicino a x_0 , ossia $f(x_0+h)$ con h molto piccolo.

IN ALTRI TERMINI $\frac{f(x_0+h) - (a+bh)}{h} \rightarrow 0 \Leftrightarrow a = f(x_0) \text{ e } b = f'(x_0)$

③ CINEMATICA

$f(x)$ è uno spazio e x è un tempo $\Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è la velocità istantanea.

REGOLE DI DERIVAZIONE

11/12/14

① $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

② $(f/g)' = (f'g - f \cdot g')/g^2$

③ $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$

④ $(f^{-1}(y))' = 1/f'(x) \circledast [y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)] \quad \circledast = 1/f' \circ f^{-1}(y)$

es. $f^{-1}(y) = \log y \quad \log y = x, y = e^x$

$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)' \circ \log y} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$

DIM ①

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) - f(x_0) + f(x_0))g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow (f'g + fg')(x_0)$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $f'(x_0) \quad g(x_0) \quad g'(x_0)$

PROP. Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow$ è continua in x_0 .

DIM: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$

DIM ② $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \frac{1}{x - x_0} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)}$

$= \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

D/M ③ Annunciamo che $g'(x_0) \neq 0$ [$y = g(x)$]

$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(y_0) \cdot g'(x_0)$

DIM ④ $f^{-1} \circ f(x) = x \Rightarrow (f^{-1} \circ f(x))' = \frac{d}{dx} (f^{-1} \circ f)(x) = 1$

$(f^{-1})' \circ f(x) \cdot f'(x) = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x)$ OSSIA: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$

TEOREMA FERMAT

• $n \geq 3 \quad x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere $\neq 0$

• Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

f ha un estremo (max o min locale) in x_0

e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

D/M: supponiamo che x_0 sia un minimo locale:

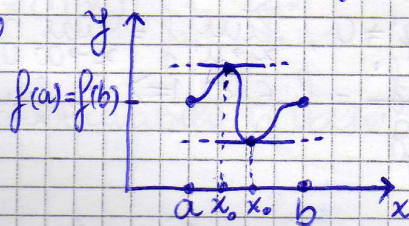
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

[ATTENZIONE:
il viceversa non è vero]

~~ATTENZIONE~~

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C([a; b])$ e derivabile in $(a; b)$ e $f(a) = f(b)$
allora $\exists x_0 \in (a; b) : f'(x_0) = 0$
(almeno uno)



DIM. ① $f \equiv \text{cost.} \Rightarrow f' = 0 \forall x \in (a; b)$

② $f \not\equiv \text{cost.} \Rightarrow$ per Weierstrass f ha un massimo in $[a; b]$

$x_0 \neq a, b \Rightarrow$ per Fermat $f'(x_0) = 0$

TEOREMA DI CAUCHY

f, g continue su $[a; b]$ e derivabili su $(a; b)$

allora $\exists x_0 \in (a; b)$ t.c. $f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a))$

OSS. $g(x) \equiv x$ e $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 : f'(x_0)(b - a) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ (ROLLE)

DIM. $F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$

$F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a; b) : F'(x_0) = 0$

TEOREMA DI LAGRANGE

f cont. su $[a; b]$, deriv. in $(a; b)$

allora $\exists x_0 \in (a; b)$ t.c. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIM. applicando Cauchy con $g(x) \equiv x$

f DERIVABILE in (a; b)

• f è crescente $\Leftrightarrow f' \geq 0$, analogamente se f è decresc. $\Leftrightarrow f' \leq 0$

• $f' > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente

DEF. f è derivabile in $(a; b)$, allora è definita la funzione $f'(x)$

se f è derivabile in x_0 diremo che $(f')'(x_0) = f''(x_0) =$ DERIVATA SECONDA

~ data f su $(a; b)$ diremo che $f \in C^k(a; b)$

$k \in \mathbb{N}$ se f è derivabile k volte in $(a; b)$ e $f^{(k)}$ è continua su $(a; b)$

DEF. $f \in C^2(a; b)$

se $f'' \geq 0$ si dice che f è convessa in $(a; b)$ [> 0 strett. conv.] [$\cup$]

se $f'' \leq 0 \Leftrightarrow f$ è concava [$\cap$]

es. $f = \log x$

① Dom. $x > 0$

② $f \leq 0$ per $x < 1$

③ $f' = 1/x > 0 \Rightarrow$ strett. cresc.

④ asintot.

④ asintot.

⑤ $f'' = -1/x^2 < 0 \Rightarrow$ concava.

TEOREMA DI DE L'HOPITAL-BERNOULLI

7/01/15

$f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ ($a \in \mathbb{R}$, oppure $= -\infty$)

f, g derivabili, $g' \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} g = 0$

supp. che $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'}{g'} = l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f}{g} = l$

[analog. se $x \rightarrow b^-$]

OSSERVAZIONI:

① $l, a \in \mathbb{R}$ definiamo: $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
 $g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \Rightarrow f, g \in C([a; b])$

(f, g derivabili in $(a; b) \Rightarrow f, g \in C((a; b))$) $\rightarrow$ siamo nel caso $\frac{0}{0}$ F.I.

es. $f = \sin x$ $g = x$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

② se le ipotesi valgono sia in $(a; b)$ che in $(c; a)$
e $f, g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, $\frac{f'}{g'} \xrightarrow{x \rightarrow a} l \Rightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

DIM: caso $\lim_{x \rightarrow a^+} f = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g$; $a, l \in \mathbb{R}$

per l'oss. ① estendiamo f e g su $[a; b)$ con $f(a) = g(a) = 0$

$g' \neq 0 \Rightarrow g$ è iniettiva su $(a; b)$

se fosse $x_0 \neq a$: $g(x_0) = 0 \Rightarrow$ per Lagrange: $\underbrace{g(x_0) - g(a)}_{=0} = \underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0} \underbrace{(x_0 - a)}_{\neq 0}$

con $\xi \in (a, x_0) \Rightarrow g \neq 0$ su $(a; b)$

OPPURE per Rolle $g(a) = g(x_0) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a; b) : g'(\xi) = 0 \rightarrow$ CONTRADD.

Applichiamo Cauchy a f e g nei punti a, x $x \in (a; b)$

$\exists c \in (a; x)$ t.c. $(f(x) - f(a))g'(c) = (g(x) - g(a))f'(c)$

QUINDI $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow l$ se $x \rightarrow a^+ \Rightarrow c \rightarrow a^+$

FORMULA DI TAYLOR

se f è derivabile in x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\text{cioè } \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$$

CON UN CAMBIO DI VARIABILE:

$y = x - x_0$, a $x = x_0$ corrisponde $y = 0$

$$f(x) = f(x_0 + y) = F(y) \quad \text{e} \quad F'(0) = f'(x_0)$$

• CONSIDERIAMO $x_0 = 0$ (TAYLOR IN $x_0 = 0$ o McLaurin)

Proposizione: f derivabile n volte in $x = 0$ e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $0 \leq k \leq n$

$\Rightarrow f(x) = o(x^n)$ [TEOREMA DI PEANO]

ATTENZIONE: f derivabile n volte in $x = 0$ significa che sono definite $f^{(k)}(x)$ per $k \leq n-1$ e x in un intorno di zero.