

ESEMPLI:

$$\bullet f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad f = o(1) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad f = o(x), \quad \frac{f}{x^2} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} + \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} - \end{cases} \quad f'(0) \nexists \text{ ed } \neq 0.$$

$$\bullet f(x) = x^n|x| = \begin{cases} x^{n+1} & x \geq 0 \\ -x^{n+1} & x < 0 \end{cases} \quad f \text{ \u00e9 derivabile } n \text{ volte in } x_0 = 0$$

DIM. PEANO: Sia $n \geq 2$:

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f^{(n)}(0)$$

$$\frac{(f^{(n-2)})'}{\frac{(x^2)'}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \text{Per l'Hopital } \frac{f^{(n-2)}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{ITERANDO } \frac{f^{(n-j)}}{x^j} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow (j=n) \frac{f}{x^n} \rightarrow 0$$

E se $f^{(k)}(0) \neq 0$?!

$F(x) = f(x) - \text{polinomio di grado } n = (T_n(x))$

in modo che F abbia derivate nulle in $x=0$

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

DI ORDINE n

$$\text{MA GRADO} = \max \{m \mid a_m \neq 0\}$$

RASSUMENDO \u00e9 il polinomio di ordine n t.c.

$$T^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) =: \text{polinomio di McLaurin di ordine } n$$

e in $x = x_0$

$$0 \rightsquigarrow x_0$$

$$x \rightsquigarrow (x - x_0) \quad [\rightsquigarrow := \text{ sostituzione}]$$

$T_n(x, x_0) =: \text{polinomio di Taylor in } x_0$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

TEOREMA DI PEANO GENERALE

Sia f derivabile n volte in $x = x_0 \Rightarrow f(x) - T_n(x, x_0) = o((x-x_0)^n)$

DIM. $F(x) = f(x) - T_n(x, x_0) \Rightarrow F^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \leq n$

es. calcolare $T_n(x)$ con $n=3$ e $f(x) = e^{x^2}$

$$f(0) = 1, f' = e^{x^2} \cdot 2x, f'(0) = 0$$

$$f'' = e^{x^2}(2 + 4x^2), f''(0) = 2, f''' = e^{x^2}(12x + 8x^3), f'''(0) = 0$$

$$T_3(x) = 1 + x^2 \quad (\text{ordine } 3, \text{ grado } 2)$$

$$\text{quindi } \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3} \rightarrow 0$$

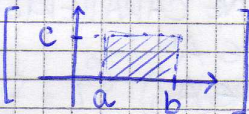
INTEGRALI

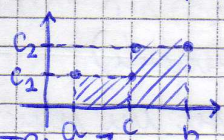
12/01/15

un integrale è un'area (con segno). l'integrale di una funzione sarà legato all'area sottesa dal grafico.

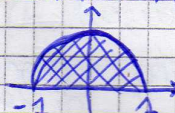
$\int_a^b f =$ integrale tra a e b di $f \geq 0$ = area $\{(x; y) \mid x \in [a; b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$
 Regione sottesa dal Gf.: EPIGRAFO

IN PARTICOLARE:

• se $f = c > 0$ ($c = 1$) Area (E_f) = $(b-a) \cdot c$ 

• $f = \begin{cases} c_1 & \text{per } a \leq x < c \\ c_2 & c \leq x \leq b \end{cases}$  Area = $\int_a^b f = c_1(c-a) + c_2(b-c)$

[FUNZIONE COSTANTE A TRAMITE]

• $f = \sqrt{1-x^2}$  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

DEF: $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

(i) f limitata

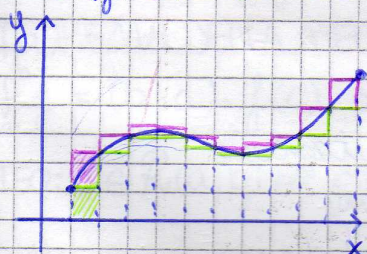
(ii) suddivisione di $[a; b]$: $D = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n \text{ con } x_0 = a \text{ e } x_n = b\}$
 ($n+1$ punti ordinati in $[a; b]$, estremi compresi)

(iii) Somme superiori e inferiori associate ad una suddivisione (o partizione)
 → DATA $D = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$

$S(f; D) =$ Somma Superiore della funzione f rispetto alla sud. D .

$$:= \sum_{i=1}^n \sup(f) (x_i - x_{i-1})$$

$$s(f; D) = \text{somme inferiori} := \sum_{i=1}^n \inf(f) (x_i - x_{i-1})$$



• D' è più fine di D se $D \subseteq D'$ come insieme

PROP: se $D \subseteq D'$ allora le somme inferiori crescono $\Rightarrow s(f; D) \leq s(f; D') \leq S(f; D) \leq S(f; D')$.

• Date 2 suddivisioni D_1 e D_2 di $[a; b]$, si chiama suddivisione unione $D_1 \cup D_2$ la suddivisione formata dai punti di a e b . e la più piccola sud. che raffina sia D_1 che D_2

oss. date D_1 e D_2 arbitrarie $\Rightarrow s(f; D_1) \leq s(f; D_2)$

DEF: $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata si dice integrabile [per Riemann] se $\inf S(f; D) = \sup s(f; D) = \theta$ e $\int_a^b f(x) dx = \theta$

ESEMPIO NEGATIVO: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0;1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$a=0, b=1$ | in ogni intervallo $(c;d)$ $\sup f = 1, \inf f = 0$

data una qualunque $D, \delta(f; D) = 1$

DEF: Dato una qualunque insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

$\chi_A(x)$ = FUNZIONE CARATTERISTICA (o INDICATIVA) dell' insieme A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A^c \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

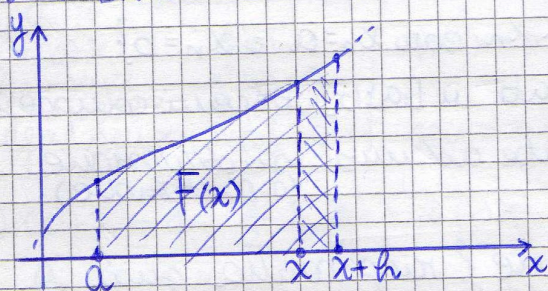
ESEMPI ~~(funzioni positive derivabili)~~ (funzioni positive derivabili)

① funzioni continue a tratti (f definita su un'unione finita disgiunta di intervalli limitati $I_1, \dots, I_n$, e su I_i f è continua)

es. $f: [a;b]$ continua con al più un numero finito di discontinuità di 1^a specie

② $f: [c;1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e monotona.

IDEA DIETRO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO:



$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f \\ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \cdot \frac{1}{h} \approx \int_x^{x+h} f(x) \cdot \frac{1}{h} = \\ &= ((x+h) - x) \cdot f(x) \cdot \frac{1}{h} = f(x) \end{aligned}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO: $F'(x) = f(x)$

$f \in \mathbb{R}(a;b) := [\text{INTEGRABILE PER RIEMANN}]$

fissiamo $c \in [a;b]$ e consideriamo la funzione integrale

$$F_c(x) := \int_c^x f, x \in [a;b].$$

• Se f è continua in $x_0 \in [a;b] \Rightarrow F_c$ è differenziabile in x_0 e $F'_c(x_0) = f(x_0)$.

DIM: fissiamo $\varepsilon > 0$, f continua in $x_0 \Rightarrow \exists \gamma \mid f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ se $|x - x_0| < \gamma$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{\int_c^{x_0+h} f - \int_c^{x_0} f}{h} = \frac{\int_c^{x_0+h} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

$$\underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)}_{= f(x_0) - \varepsilon} < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f < \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)}_{= f(x_0) + \varepsilon} \leftarrow \text{se } |h| < \gamma$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f - f(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

13/01/15

DEF: $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata, $f \in \mathcal{R}(a; b)$

significa che f è integrabile su $[a; b]$ e denotiamo $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$

TEOREMA: $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a; b)$

i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a; b)$ e $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ (linearità)

ii) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$ (positività)

iii) $a < c < b \Rightarrow f \in \mathcal{R}(a; c) \cap \mathcal{R}(c; b)$ e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (addittività)
e se $f \in \mathcal{R}(a; c) \cap \mathcal{R}(c; b) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(a; b)$

COMMENTI: $f = c_1$ $g = c_2$

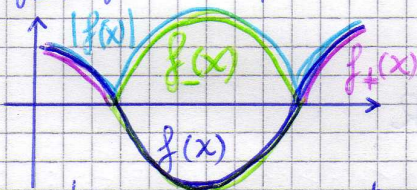
$$\int_a^b c_1 + c_2 = (b-a)(c_1 + c_2) = (b-a)c_1 + (b-a)c_2 = \int_a^b c_1 + \int_a^b c_2$$

OSS: $f \in \mathcal{R}(a; b) \Rightarrow f_+, f_-, |f| \in \mathcal{R}(a; b)$

$$f_+(x) = \max(0; f(x))$$

$$f_-(x) = \max(0; -f(x))$$

$$|f(x)| = f_+ + f_-$$



OSS: $f \geq g$, $f, g \in \mathcal{R} \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g \Leftrightarrow \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|$$

DEF: se $a > b$ $\int_a^b f = -\int_b^a f$ | $\int_2^1 f = -\int_1^2 f$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$$\int_a^b f = (b-a) \cdot f(c) \text{ per un opportuno } c \in (a; b)$$

TEO: $f \in \mathcal{R}(a; b) \Rightarrow \inf_{[a; b]} f \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \leq \sup_{[a; b]} f$
MEDIA INTEGRALE

DIM: $m \leq f \leq M$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Se f è continua: per il teorema dei valori intermedi: $\exists c \in (a; b)$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$

OSS: $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M \Rightarrow \frac{1}{a-b} \int_b^a f$

Supponiamo che $f \in C([a; b])$ e vogliamo calcolare $\int_a^b f$

" $G: G' = f$, esempi:

OSS: f, g differenziabili su I

e $f' = 0$ su $I \Rightarrow f \equiv \text{cost.}$ su I

DIM: $x < y$ $x, y \in I$, applico Lagrange su $[x; y]$

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \text{ con } c \in (x; y)$$

$$0 \Rightarrow f(x) = f(y)$$

f	G
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ se $n \neq -1$ e $\log x $ se $n = -1$
e^x	e^x
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg x$ $\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mid \operatorname{arcsen} x \right]$

oss: $\exists$ al più una soluzione dell'equazione DIFFERENZIALE.

dati $c \in [a; b]$ e G_0 $\begin{cases} G' = f \\ G(c) = G_0 \end{cases}$

e dal T.F.C. segue che $G = \int_c^x f + G_0$

COROLLARIO (!!) f cont. su $[a; b]$ e $G' = f$

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

DIM: T.F.C. $F_a(x) = f \Rightarrow G(x) = F_a(x) + C \mid F_a(b) = \int_a^b f = G(b) - C = G(b) - G(a)$

DEF: una funzione G t.c. $G' = f$ si chiama PRIMITIVA di f .

$\int f =$ integrale indefinito di $f = \{ \text{primitive di } f \}$

esercizi

$$\int_0^1 x^n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad n \geq 0$$

$$\int_0^R \frac{1}{x^2+1} = [\arctg x]_0^R = \arctg R$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\begin{cases} (f \cdot g)' = f'g + fg' \\ (f \circ u)' = f' \cdot u \cdot u' \end{cases} \quad \left| \quad f \cdot g = \int (f'g + fg') \text{ ossia: } \int f'g = fg - \int fg' \right.$$

$$\int_0^1 e^x \sin x = e^x \sin x - \int_0^1 e^x \cos x = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int_0^1 e^x \sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 e^x \sin x = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow \int_0^1 e^x \sin x = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$