Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Teorema *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ una successione limitata, ossia, esistono due numeri a e b tali che $a \le x_n \le b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $I_0 = [a,b] =: [a_0, b_0]$ e dividiamo in due tale intervallo: $I_0 = I \cup I'$ con $I = [a,c]$, $I' = [c,b]$ essendo $c = (a+b)/2$ il punto di mezzo di I_0. Chiamiamo $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in I\}$ e $\mathcal{N}' = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in I'\}$. Chiaramente almeno uno dei due insiemi $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ contiene infiniti elementi (poiché $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}' = \mathbb{N}$). Se $\mathcal{N}$ contiene infiniti elementi poniamo $I_1 = I$ e $\mathcal{N}_1 := \mathcal{N}$ altrimenti, $I_1 = I'$ e $\mathcal{N}_1 := \mathcal{N}'$. Chiamiamo a_1 l'estremo di sinistra di I_1 e b_1 l'estremo di destra: chiaramente, $a_0 \le a_1 < b_1 \le b_0$ e $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$. Ora, iteriamo la stessa costruzione con I_1 al posto di I_0 costruendo I_2 e $\mathcal{N}_2$ e così via. In tal modo otteniamo una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ con le seguenti proprietà:

(i) $a_0 \le \cdots \le a_{k-1} \le a_k < b_k \le b_{k-1} \le \cdots \le b_0$

(ii) $b_k - a_k = \dfrac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^k}$

(iii) $\mathcal{N}_k = \{n : a_n \in I_k\}$ contiene infiniti elementi.

Dalla (i) segue che la successione $\{a_k\}$ è monotona crescente limitata superiormente (da un qualunque b_j) e che $\{b_k\}$ è monotona decrescente limitata inferiormente (da un qualunque a_j). Dunque esistono i limiti $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$ e $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$. Dalla (ii) segue che $\alpha = \beta$ poiché

$$\beta - \alpha = \lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0 \ .$$

Ora, scegliamo $n_0 := 0$; $n_1 > n_0$ tale che $n_1 \in \mathcal{N}_1$; $n_2 > n_1$ tale che $n_2 \in \mathcal{N}_2$; e possiamo iterare (per la (iii)) in modo tale che $n_k \in \mathcal{N}_k$ per ogni k e $n_{k+1} > n_k$. Quindi $a_{n_k} \in I_k$ per ogni k, ossia, $a_k \le a_{n_k} \le b_k$ e per il criterio del confronto $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$. ∎

Osservazione: Questo teorema corrisponde al teorema 4.7, p. 115 in [B]; nel testo [B] si chiama "teorema di Bolzano–Weierstass" il teorema 3.7, p. 78, il cui enunciato è il seguente:

Teorema 3.7 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato e infinito. Allora esiste in $\mathbb{R}$ almeno un punto di accumulazione per E.*

Dimostrazione Scegliamo un punto qualunque $a_1 \in E$ e consideriamo l'insieme $E_1 := E \backslash \{a_1\}$. Tale insieme è ancora infinito. Scelgliamo $a_2 \in E_1$ e chiamiamo $E_2 := E_1 \backslash \{a_2\}$ che sarà ancora infinito. Iterando otterremo una successione $\{a_n\}$ con $a_n \in E$. Poiché E è limitato anche $\{a_n\}$ è limitata e dal teorema di Bolzano–Weierstrass segue che esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ con limite $\ell \in \mathbb{R}$: tale limite è un punto di accumulazione per E. ∎