Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

Il sistema dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ è definito da sedici assiomi[1]. In queste note vengono definiti i numeri naturali ($\mathbb{N}$), interi ($\mathbb{Z}$) e razionali ($\mathbb{Q}$).

I numeri naturali

Definizione 1 (i) *Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ viene detto* **induttivo** *se:*

- $0 \in I$
- $x \in I \implies x + 1 \in I$.

(ii) *L'***insieme dei numeri naturali** $\mathbb{N}$ *è il più piccolo insieme induttivo di $\mathbb{R}$, cioè*[2]

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : \ \forall\ I \subseteq \mathbb{R} \text{ induttivo}, x \in I\} = \bigcap_{I \text{ induttivo}} I.$$

Osservazione 2 (i) Esempi di insiemi induttivi sono $I_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$ e $I_2 := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$. Dunque dalla definizione di $\mathbb{N}$ segue che $\mathbb{N} \subseteq I_1$ e $\mathbb{N} \subseteq I_2$. In particolare, $n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non ci sono interi tra 0 e 1: *se $x \in \mathbb{R}$ è tale che $0 < x < 1$ allora $x \notin \mathbb{N}$.*

(ii) Dalla definizione di $\mathbb{N}$ e dagli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ segue immediatamente che $\mathbb{N}$ soddisfa le seguenti proprietà[3]:

(P_1) $0 \in \mathbb{N}$;

(P_2) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$;

(P_3) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \ne 0$;

(P_4) $n, m \in \mathbb{N}$ e $n + 1 = m + 1 \implies n = m$;

(P_5) $I \subseteq \mathbb{N}$, I induttivo $\implies I = \mathbb{N}$.

Definizione 3 *L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è l'insieme $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$.*

Definizione 4 *L'insieme dei numeri razionali è definito come*[4]
$\mathbb{Q} := \{r = p/q : \ \ p \in \mathbb{Z}\ ,\ q \in \mathbb{N}\ ,\ q \ne 0\}$.

Proposizione 5 ("Principio di induzione") *Siano $\mathcal{P}(n)$ affermazioni che dipendono da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathcal{P}(0)$ sia vera e che dalla verità di $\mathcal{P}(n)$, con $n \ge 0$, segua che $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione Sia $I := \{n \in \mathbb{N} : \ \mathcal{P}(n) \ \text{ è vera}\}$. Dalle ipotesi segue che $I \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo e quindi, per (P_5), $I = \mathbb{N}$. ∎

Osservazione 6 (i) Si osservi che il "primo valore" non deve necessariamente essere 0 ma può essere un qualunque numero intero $n_0 \in \mathbb{Z}$; vale, infatti, la seguente generalizzazione del principio di induzione: *Se $\mathcal{P}(n_0)$ è vera e da "$\mathcal{P}(n)$ vera per $n \ge n_0$" segue $\mathcal{P}(n+1)$, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\ n \ge n_0$ con $n \in \mathbb{Z}$.*
Basta porre $\mathcal{P}'(n) := \mathcal{P}(n_0 + n)$ ed applicare la Proposizione 3 a $\mathcal{P}'(n)$.
Un'altra formulazione equivalente che si usa spesso è:
Se $\mathcal{P}(0)$ è vera e da "$\mathcal{P}(k)$ vera per $0 \le k \le n$" segue $\mathcal{P}(n+1)$, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
Basta infatti porre $\mathcal{P}'(n) := \{\mathcal{P}(k) : \ 0 \le k \le n\}$ ed applicare la Proposizione 3 a $\mathcal{P}'(n)$.

---

[1] Vedi, ad esempio, `http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/ING_14_15/1>0.pdf`.

[2] Si osservi che l'intersezione di insiemi induttivi è un insieme induttivo.

[3] (P_1)÷(P_5) sono note come "assiomi di Peano". Si noti che dal nostro punto di vista essi sono proposizioni matematiche che derivano dagli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ e non sono assiomi.

[4] Le notazioni in "forma di frazione" p/q e $\dfrac{p}{q}$, per definizione, significano pq^{-1}.